Definición de espacio vectorial. Corolarios simples de los axiomas

Objetivos. Definir el concepto de *espacio vectorial* y demostrar corolarios simples de los axiomas.

Requisitos. Antes de estudiar la definición axiomática de espacio vectorial, es útil conocer bien el espacio $\mathbb{R}^n$ de *vectores aritméticos* y el espacio $V^2(O)$ de *vectores geométricos* (*flechas*) en el plano.

Definición de espacio vectorial

1. Definición (espacio vectorial). Sean V un conjunto y $\mathbb{F}$ un campo. Supongamos que estén definidas dos aplicaciones:

- *adición de elementos de V:*
  $+\colon V \times V \to V$ (una aplicación definida en $V \times V$ con valores en V),
  $(a, b) \mapsto a + b$;
- *multiplicación de elementos de V por elementos de $\mathbb{F}$:*
  $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \to V$ (una aplicación definida en $\mathbb{F} \times V$ con valores en V),
  $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$.

Se dice que V con estas operaciones es un *espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{F}$, si se cumplen las siguientes propiedades (*axiomas de espacio vectorial*):

1. Propiedad asociativa de la adición:

$$\forall a, b, c \in V \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Existencia de cero:

$$\exists z \in V \qquad \forall a \in V \qquad \Big(a + z = a \quad \wedge \quad z + a = a\Big).$$

   Se puede demostrar (lo hacemos en continuación) que el vector z con estas propiedades es único. Este vector se llama *vector cero* (del espacio V). Vamos a denotarlo por $\mathbf{0}$.

3. Existencia de elementos opuestos:

$$\forall a \in V \qquad \exists u \in V \qquad \Big(a + u = \mathbf{0} \quad \wedge \quad u + a = \mathbf{0}\Big).$$

   Se puede demostrar que para todo $a \in V$ el vector u con estas propiedades es único. Este vector se llama *vector opuesto* (o *vector inverso aditivo*) al vector a y se denota por $-a$.

4. Propiedad conmutativa de la adición:

$$\forall a, b \in V \qquad a + b = b + a.$$

5. Distributividad de la multiplicación por escalares con respecto a la adición de vectores:

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

6. Distributividad de la multiplicación por escalares con respecto a la adición de escalares:

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

7. Propiedad homogénea de la multiplicación por elementos de $\mathbb{F}$ (concordancia entre la multiplicación por escalares en V y la multiplicación en $\mathbb{F}$):

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

8. Unitaridad, o Condición de normalización de la multiplicación por elementos de $\mathbb{F}$:

$$\forall a \in V \qquad 1a = a.$$

2. Terminología. En vez de *espacio vectorial* se dice también *espacio lineal.* Si V con operaciones $+$ y $\cdot$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, entonces los elementos de V se llaman *vectores* (del espacio vectorial V), los elementos de $\mathbb{F}$ se llaman *escalares* (para el espacio vectorial V), y operaciones $+$ y $\cdot$ se llaman *operaciones lineales*: *adición de los vectores* y *multiplicación de los vectores por los escalares.* En lugar de $\lambda \cdot a$ se escribe simplemente λa.

3. Espacio vectorial como una terna o tetra. Teóricamente, es posible considerar en un mismo conjunto V con varias operaciones lineales. Por eso sería más preciso decir que el espacio vectorial es la *terna* $(V, +, \cdot)$ o la *tetra* $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$. Pero la situación con varias operaciones es muy rara. Habitualmente está claro, de cuales operaciones lineales se trata, y en lugar $(V, +, \cdot)$ o $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ se escribe simplemente V.

Corolarios simples de los axiomas

Propiedades de la adición

4. Unicidad del vector cero. Sean $z', z'' \in V$ tales que

$$\forall a \in V \qquad a + z' = a; \tag{1}$$
$$\forall a \in V \qquad z' + a = a; \tag{2}$$
$$\forall a \in V \qquad a + z'' = a; \tag{3}$$
$$\forall a \in V \qquad z'' + a = a. \tag{4}$$

Entonces $z' = z''$. Idea de demostración: considerar la suma $z' + z''$.

5. Unicidad del vector opuesto. Sea $a \in V$ y sean b' y b'' tales que

$$a + b' = \mathbf{0}, \tag{5}$$
$$b' + a = \mathbf{0}, \tag{6}$$
$$a + b'' = \mathbf{0}, \tag{7}$$
$$b'' + a = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Entonces $b' = b''$. Idea de demostración: considerar la suma $(b' + a) + b''$ y aplicar la asociatividad de la adición en V.

6. Ley de cancelación para la adicón. Para todos $a, b, c \in V$, si $a+c = b+c$, entonces $a = b$.

7. Existencia y unicidad de diferencia de vectores. Para todos $a, b \in V$, existe un elemento único x tal que $a+x = b$. El elemento x con esta propiedad se llama la *diferencia de* b *y* a y se denota por $b - a$. Además, $b - a = b + (-a)$.

8. Ejercicio. Demuestre las propiedades de la adición.

9. Teorema fuerte sobre la unicidad de cero. Sean $z, v \in V$ tales que $v + z = v$. Entonces $z = \mathbf{0}$. En otras palabras, si sabemos que el elemento z hizo el papel de elemento neutro en la suma con *algún* vector v, entonces es el cero del espacio y siempre hace el papel de neutro aditivo.

Demostración. Usamos el elemento inverso aditivo de v de la siguiente manera:

$$z \overset{(1)}{=\!=} \mathbf{0} + z \overset{(2)}{=\!=} (-v + v) + z \overset{(3)}{=\!=} -v + (v + z) \overset{(4)}{=\!=} -v + v \overset{(5)}{=\!=} \mathbf{0}.$$

Justificación de los pasos:

(1) Por la propiedad principal de $\mathbf{0}$.

(2) Por la definición de $-v$.

(3) Por la propiedad asociativa de la adición en V.

(4) Por la hipótesis que $v + z = v$.

(5) Por la definición de $-v$. $\square$

Propiedades de la multiplicación por escalares

10. Multiplicación por escalar cero. $0a = \mathbf{0}$ para todo $a \in V$.

11. Multiplicación por vector cero. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

12. Expresión del vector opuesto a través de multiplicación por -1. $-a = (-1)a$ para todo $a \in V$.

13. ¿Cuándo el producto de un vector por un escalar no nulo puede ser cero?. Para todos $a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, si $\lambda a = \mathbf{0}$ y $\lambda \neq 0$, entonces $a = \mathbf{0}$.

14. ¿Cuándo el producto de un vector no nulo por un escalar puede ser cero?. Para todos $a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, si $\lambda a = \mathbf{0}$ y $a \neq 0$, entonces $\lambda = 0$.

15. Ejercicio. Demuestre las propiedades de multiplicación por escalares.