Notación para tuplas y sus componentes

Ejercicios

Objetivos. Conocer una de las notaciones breves para trabajar con tuplas y sus componentes.

Motivación. Uno de los pasos importantes en la historia de matemáticas fue el desarrollo del simbolismo algebraico (François Viète y otros matemáticos del siglo XVI):

> "El cuadrado de la suma de dos términos
> es igual al cuadrado del primer término
> más el doble producto de ambos términos
> más el cuadrado del segundo término."

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

De la misma manera, es importante tener una notación breve para trabajar con tuplas (listas) de números reales. Compare las palabras con la fórmula:

> "la tupla de longitud n
> cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$
> para todo índice k desde 1 hasta n"

$$\left[\frac{k}{k+1}\right]_{k=1}^{n}.$$

Ejemplo. $$\left[j^4 \right]_{j=1}^{3} = \begin{bmatrix} 1^4 \\ 2^4 \\ 3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 81 \end{bmatrix}.$$

Escriba en forma explícita los siguientes vectores:

1. $\left[j+5 \right]_{j=1}^{3} =$

2. $\left[\dfrac{3}{p} \right]_{p=1}^{2} =$

3. $\left[(-1)^s \right]_{s=1}^{4} =$

4. $\left[\cos\dfrac{k\pi}{2} \right]_{k=1}^{4} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} =$

Si surgen dudas en la simplificación de la última respuesta, es una señal que urge repasar la trigonometría.

Variable muda. En la notación $a = \left[\, f(j) \,\right]_{j=1}^{n}$ la variable j es *muda*. Esto significa que el vector a no depende de j, además la variable j se puede cambiar por otra variable.

Escriba en forma explícita los siguientes vectores:

5. $\left[\, 2^i \,\right]_{i=1}^{3} =$ $\qquad$ $\left[\, 2^j \,\right]_{j=1}^{3} =$

Encuentre fórmulas simples para los siguientes vectores.

Ejemplo. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \left[\, 2j \,\right]_{j=1}^{3}.$

6. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \left[\qquad\right]_{k=1}^{4}.$

7. $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(1) \\ \operatorname{sen}(2) \\ \operatorname{sen}(3) \end{bmatrix} = \left[\qquad\qquad\right]_{i=1}^{3}.$

8. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} =$

9. $\begin{bmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix} =$

10. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

11. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

El vector puede depender de algunos parámetros.

12. $\left[\, i+k \,\right]_{i=1}^{4} = \begin{bmatrix} 1+k \\ 2+k \\ 3+k \\ 4+k \end{bmatrix}.$

La respuesta depende de $\underbrace{\qquad\qquad}_{¿i \text{ ó } k?}$.

La variable $\underbrace{\qquad}_{?}$ es muda.

La variable $\underbrace{\qquad}_{?}$ es un parámetro.

13. $\left[\, \dfrac{1}{j+k^2} \,\right]_{k=1}^{3} =$

Encuentre una fórmula simple:

14. $\begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix} =$

Puede ser que todas las componentes del vector son iguales:

Ejemplos. $\left[\, 5 \,\right]_{i=1}^{3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$ $\qquad \left[\, \cos(a) \,\right]_{p=1}^{2} = \begin{bmatrix} \cos(a) \\ \cos(a) \end{bmatrix}.$

15. $\left[\, 7 \,\right]_{j=1}^{4} =$

16. $\left[\, j^2 \,\right]_{k=1}^{3} =$

Encuentre una fórmula simple:

17. $\begin{bmatrix} 3c^2 \\ 3c^2 \\ 3c^2 \\ 3c^2 \end{bmatrix} = \left[\qquad\qquad \right]_{k=1}^{4}.$

Definición (delta de Kronecker o símbolo de Kronecker).
La expresión $\delta_{i,j}$ está definida para todo par de índices $i, j \in \mathbb{Z}$ mediante la siguiente fórmula:

$$\delta_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplos. $\delta_{3,1} = 0, \qquad \delta_{4,4} = 1, \qquad \delta_{-7,1} = 0.$

18. $\delta_{4,9} =$ $\qquad$ $\delta_{2,2} =$ $\qquad$ $\delta_{j,j} =$ $\qquad$ $\delta_{i+5,i} =$

Ejemplo. $\left[\, \delta_{k,3} \,\right]_{k=1}^{4} = \begin{bmatrix} \delta_{1,3} \\ \delta_{2,3} \\ \delta_{3,3} \\ \delta_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

19. $\left[\, \delta_{i,3} \,\right]_{i=1}^{3} =$

20. $\left[\, 5\delta_{2,k} \,\right]_{k=1}^{3} =$

Escriba en forma breve usando la delta de Kronecker:

21. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\qquad \right]_{k=1}^{4}$

22. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} =$