Notación para tuplas y sus componentes

Objetivos. Conocer notación para trabajar con tuplas y sus componentes.

Motivación. Es mucho más cómodo escribir la fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ que la frase "El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el doble producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término." De la misma manera es importante tener una notación breve para definir elementos del espacio $\mathbb{R}^n$ y no escribir cada vez algo así: "el vector de longitud n cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$ para todo k desde 1 hasta n".

Notación. $\big[f(j)\big]_{j=1}^{n}$ es el vector de longitud n tal que su j-ésima componente es igual a $f(i)$, para todo índice $j \in \{1,\ldots,n\}$. Aquí por lo común $f(j)$ es una fórmula con variable j que tiene sentido al menos para $j \in \{1,\ldots,n\}$. De manera más general y más abstracta, f es una función cuyo dominio contiene $\{1,\ldots,n\}$.

1. Ejemplo. $$\big[3j^2\big]_{j=1}^{4} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1^2 \\ 3\cdot 2^2 \\ 3\cdot 3^2 \\ 3\cdot 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 27 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

2. Variable muda. En la notación $a = \big[f(j)\big]_{j=1}^{n}$ la variable j es *muda*. Esto significa que el vector a no depende de j, además la variable j se puede cambiar por otra variable.

3. Ejemplo. $$\big[3k^2\big]_{k=1}^{4} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1^2 \\ 3\cdot 2^2 \\ 3\cdot 3^2 \\ 3\cdot 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 27 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

4. Notación para sacar una componente de una tupla. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $j \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces denotamos por x_j a la j-ésima componente de x. Si x es un objeto complicado, entonces lo escribimos entre paréntesis: $(x)_j$.

5. Ejemplo. La suma de elementos de $\mathbb{R}^n$ se define por componentes. Si $a, b \in \mathbb{R}^3$ son

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$a + b = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En esta situación para referir a la tercera componente de $a+b$ escribimos $(a+b)_3$:

$$(a+b)_3 = a_3 + b_3 = -2 + 6 = 4.$$