Listas de vectores y conjuntos de vectores

La explicación de los temas "Dependencia lineal" y "Bases" en el curso de Álgebra Lineal se puede basar en uno de los siguientes dos conceptos (o en ambos):

1) *listas de vectores*, llamadas también *familias finitas de vectores*, *tuplas de vectores*, *sucesiones finitas de vectores* y *sistemas de vectores*;

2) *conjuntos de vectores*.

Algunos autores prefieren el primer concepto (por ejemplo, Lipschutz & Lipson, *Linear Algebra*, 2009; Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2004); otros suelen usar el segundo. Muchos autores estadounidenses (por ejemplo, Golub & Van Loan, *Matrix Computations*, 1996) usar la palabra *set* (*conjunto*) aún cuando en realidad hablan de listas.

En este pequeño texto intento de explicar la diferencia entre estos dos conceptos y argumentar por qué prefiero trabajar con *listas de vectores*, aunque reconozco que en algunas situaciones es más cómodo o más natural trabajar con *conjuntos de vectores*.

El texto está dirigido principalmente a las personas que ya tienen conocimientos profundos de Álgebra Lineal. Los estudiantes que empiezan a estudiar esta materia pueden no pensar mucho en la diferencia entre estos dos conceptos.

Índice

1. Preguntas capciosas

Estas preguntas están dirigidas a las personas que siempre usan el término *conjunto de vectores*.

Pregunta 1. Consideremos los siguientes conjuntos de números enteros:

$$\{7, 2\}, \qquad \{2, 7\}, \qquad \{2, 7, 2\}.$$

Pregunta: ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales entre si?

Pregunta 2. Consideremos la siguiente matriz 2×2 con entradas reales:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determine cuántos elementos tiene el *conjunto de los renglones* de la matriz A. Determine si este conjunto es linealmente dependiente o independiente. Determine si la matriz A es invertible. Pregunta: ¿Es equivalente la invertibilidad de una matriz cuadrada a la independencia lineal del *conjunto* de sus renglones?

Pregunta 3. En el espacio $\mathbb{R}^2$ consideremos los vectores

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la base canónica (estándar) de $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores e_1, e_2, y sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores b_1, b_2, donde $b_1 = e_2$, $b_2 = e_1$. Calcule la columna de coordenadas del vector v respecto a la base $\mathcal{E}$, luego respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$v_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad v_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Determine si $v_{\mathcal{E}}$ coincide con $v_{\mathcal{B}}$. Determine si el conjunto $\{e_1, e_2\}$ coincide con el conjunto $\{b_1, b_2\}$. Pregunta: ¿Cómo debemos definir el concepto de *base*, si queremos usarlo para trabajar con coordenadas de vectores?

Pregunta 4. En el espacio $\mathbb{R}^2$ consideremos los siguientes vectores a y b:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine qué vectores produce el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt al aplicarlo a los vectores a, b. Determine qué vectores produce este algoritmo al aplicarlo a los vectores b, a. Pregunta: ¿Podemos decir que la entrada del algoritmo de Gram–Schmidt es un conjunto finito de vectores?

2. Diferencia entre los dos conceptos

Ejemplo 1. En el espacio $\mathbb{R}^3$ consideremos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La longitud de la lista (a_1, a_2, a_3) es igual a tres, pero el primer elemento de la lista es igual al tercero. Todas las siguientes listas son diferentes:

$$(a_1, a_2, a_3), \qquad (a_1, a_2), \qquad (a_2, a_1, a_3), \qquad (a_2, a_3, a_1).$$

El conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ consiste de dos elementos. Los siguientes conjuntos son iguales:

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\} = \{a_2, a_1, a_3\} = \{a_2, a_3, a_1\}.$$

3. Dos definiciones de la dependencia lineal: para listas y para conjuntos

Vamos a suponer que V es un espacio vectorial real.

Definición 1 (lista linealmente dependiente de vectores). Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Se dice que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es *linealmente dependiente* si existen algunos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos iguales a cero tales que

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}.$$

En la situación de la Definición 1 se dice también que *los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente dependientes*. Es importante comprender que en esta frase no se trata de una propiedad individual que posée cada elemento (analogía: los números 8 y 14 son pares), sino de una propiedad colectiva (analogía: los números 15 y 4 son primos relativos).

Definición 2 (conjunto linealmente dependiente de vectores). Sea S un subconjunto de V. Se dice que el conjunto S es *linealmente dependiente* si existen algún número $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, algunos vectores diferentes por pares $v_1, \ldots, v_k \in S$ y algunos escalares $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ no todos iguales a cero tales que

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = \mathbf{0}.$$

El concepto de *conjunto linealmente dependiente* permite trabajar no solamente con conjuntos finitos, sino también con conjuntos infinitos. Sin embargo, el concepto de la dependencia lineal de conjuntos infinitos se usa muy raramente. En efecto, en un espacio de dimensión finita cualquier conjunto infinito es linealmente dependiente, y en espacios de dimensión infinita es más natural trabajar no con sumas finitas de vectores, sino con series (sumas infinitas convergentes). Véase la sección “Bases de Hamel” de este texto.

4. Las dos definiciones son equivalentes si se sabe que los vectores son diferentes

Por lo común se estudia la dependencia lineal de conjuntos finitos de vectores, además estos conjuntos están dados por listas de sus elementos. Por eso los autores que dan la Definición 2 luego casi siempre aplican la Definición 1. Para justificar este truco ellos deberían demostrar la siguiente Proposición.

Proposición 1. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores diferentes. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente.

(b) el conjunto de vectores $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es linealmente dependiente.

Demostración. La implicación (a)$\Rightarrow$(b) es trivial: si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ son como en la Definición 1, entonces ponemos $k = m$, $v_1 = a_1, \ldots, v_m = a_m$, $\mu_1 = a_1, \ldots, \mu_m = a_m$.

Demostremos la implicación (b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que el número k, los vectores $v_1, \ldots, v_k$ y los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son como en la Definición 2. Notemos que no necesariamente $k = m$, puede ser que $k < m$. Existen índices $p_1, \ldots, p_k$ tales que

$$v_1 = a_{p_1}, \quad \ldots, \quad v_k = a_{p_k}.$$

Es fácil ver que los índices $p_1, \ldots, p_k$ deben ser diferentes, porque los vectores $v_1, \ldots, v_k$ son diferentes.

Para cualquier índice $i \in \{1, \ldots, m\}$ se cumple uno y solamente uno de los siguientes dos casos:

- En el primer caso, $i \in \{p_1, \ldots, p_k\}$, así que $i = p_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$. Notemos que este j es único pues $p_1, \ldots, p_k$ son diferentes.
- En el segundo caso, $i \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$.

Ahora definamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de la siguiente manera:

$$\lambda_i := \begin{cases} \mu_j, & \text{si } i = p_j; \\ 0, & \text{si } i \notin \{p_1, \ldots, p_k\}. \end{cases}$$

Por la hipótesis, existe un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\mu_j \neq 0$, entonces para $i = p_j$ tenemos $\lambda_i = \lambda_{p_j} = \mu_j \neq 0$, así que no todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son cero. Además,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i &= \sum_{i \in \{p_1, \ldots, p_k\}} \lambda_i a_i + \sum_{i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_{p_j} a_{p_j} + \sum_{i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}} 0 a_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\square$

5. Relación entre las dos definiciones sin saber a priori que los vectores son diferentes

Proposición 2. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Entonces las dos siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente;

(b) los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son diferentes y el conjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1 y del hecho que si algunos de los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son iguales, entonces la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente. □

6. Invertibilidad de una matriz y dependencia lineal de sus renglones

Ejemplo 2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo el tercer renglón de A coincide con el primero, así que los renglones de A son linealmente dependientes (es decir, forman una lista linealmente dependiente). Al mismo tiempo el *conjunto* de los renglones de la matriz A consta de dos elementos y es linealmente independiente.

Proposición 3 (Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de la dependencia lineal de sus renglones). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) La matriz A es invertible.

(b) La lista de los renglones de la matriz A es linealmente independiente.

(c) Los renglones de la matriz A son diferentes y el conjunto de los renglones de A es linealmente independiente.

7. Algoritmos trabajan con listas, no con conjuntos

Todos los algoritmos de álgebra lineal numérica, incluso la eliminación de Gauss y la ortogonalización de Gram–Schmidt, trabajan con listas o arreglos de vectores, por los común dados como renglones o columnas de matrices. La numeración o el orden de los vectores está dada desde el inicio y es importante para programar el algoritmo. A menudo no se sabe a priori si los vectores iniciales son diferentes a pares.

8. Bases y coordenadas

Definición 3 (base como conjunto, base no ordenada). Un subconjunto de V se llama *base no ordenada* de V si es linealmente independiente y genera al espacio V.

Definición 4 (base como lista, base ordenada). Una lista de vectores en V se llama *base ordenada* de V si es linealmente independiente y genera al espacio V.

¿Para qué sirven bases de espacios vectoriales? Principalmente, para definir coordenadas de vectores, es decir, para asociar a un vector una *lista* de números. Por supuesto, el orden de elementos de la base es importante para definir coordenadas, por eso uso la palabra *base* para bases ordenadas. Algunos autores definen *bases* con la Definición 3 y demuestran algunas de sus propiedades usando el lenguaje de conjuntos, pero luego casi siempre usan *bases ordenadas* para trabajar con coordenadas de vectores.

Ejemplo 3. Denotemos por $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2, incluso al polinomio cero. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ consideremos los monomios

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

Se puede ver que la lista $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Las coordenadas del polinomio

$$f(x) = 7 + 8x + 9x^2,$$

respecto a $\mathcal{E}$ son 7, 8, 9, o sea el vector columna de las coordenadas de f respecto a $\mathcal{E}$ es

$$f_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Notemos que la lista $\mathcal{B} = (e_2, e_1, e_0)$ es **otra** base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y el vector de las coordenadas de f respecto a $\mathcal{B}$ es

$$f_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

9. Bases de Hamel

Definición (base de Hamel). Una *base de Hamel* en un espacio vectorial por lo común se define como un conjunto (no necesariamente finito) de vectores que es linealmente independiente y genera al espacio.

Aquí se usa la Definición 2, aunque también podríamos generalizar la Definición 1 y hablar de una familia (no necesariamente finita) de vectores. Notemos que la existencia de bases de Hamel (infinitas) se demuestra de manera no constructiva, lo que disminuye su utilidad. Por lo común los espacios de dimensión infinita se consideran con una norma o, más general, con una topología. En este caso en vez de sumas finitas y bases de Hamel es más natural trabajar con series de vectores (sumas infinitas convergentes) y *bases de Schauder*.