Matrices triangulares

Objetivos. Definir matrices triangulares superiores y triangulares inferiores, y estudiar algunas de sus propiedades básicas.

Requisitos. Operaciones con matrices.

1. Descripción formal de los elementos en la diagonal principal, fuera de la diagonal principal, por arriba y por abajo de la diagonal principal. Sea A una matriz cuadrada, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Los elementos $A_{i,i}$ forman la *diagonal principal* de A y se llaman *entradas diagonales* de A.

- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está en la diagonal principal de A?. Respuesta correcta: cuando $i = j$.
- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está fuera de la diagonal principal de A?.
- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está por arriba de la diagonal principal de A?.
- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está por debajo de la diagonal principal de A?.

Matrices triangulares superiores

2. Definición (matriz triangular superior). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es *triangular superior* si todos sus elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero:

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad i > j \quad \Longrightarrow \quad A_{i,j} = 0.$$

El conjunto de todas las matrices triangulares cuadradas de tamaño n se denota por $\mathtt{ut}_n(\mathbb{F})$. En otras palabras,

$$\mathtt{ut}_n(\mathbb{F}) := \big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad i > j \quad \Longrightarrow \quad A_{i,j} = 0 \big\}.$$

3. Ejemplos.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Notemos que en una matriz triangular superior algunos (hasta todos) de los elementos por encima de la diagonal principal o en la diagonal principal *pueden ser iguales a cero*. Por ejemplo, la matriz nula $\mathbf{0}_{n,n}$ es triangular superior. La condición que define matrices triangulares superiores sólo nos dice que todos los elementos *por debajo* de la diagonal principal deben cero iguales a cero.

4. Ejemplo. Calcule $A+B$ y $3A$, si

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Suma y producto por escalar de matrices triangulares superiores. Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces $A+B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y $\lambda A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$.

6. Ejemplo. Multipliquemos dos matrices triangulares superiores:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12+0+0 & -18-10+0 & 6-2-5 \\ 0+0+0 & 0+35+0 & 0+7-4 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & -28 & -1 \\ 0 & 35 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. Ejemplo. El ejemplo anterior permite formular una hipótesis: el producto de matrices triangulares superiores AB también es triangular superior, y cada elemento diagonal del producto es el producto de los elementos correspondientes de A y B.

Para comprender mejor porque es así consideremos el producto de dos matrices triangulares superiores A, B de orden 6 y calculemos un elemento debajo de la diagonal principal, por ejemplo $(AB)_{5,2}$.

$$(AB)_{5,2} = \underbrace{A_{5,1}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{1,2} + \underbrace{A_{5,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{2,2} + \underbrace{A_{5,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} \underbrace{B_{3,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \underbrace{A_{5,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} \underbrace{B_{4,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + A_{5,5} \underbrace{B_{5,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + A_{5,6} \underbrace{B_{6,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0.$$

En los primeros sumandos ($1 \leq k \leq 2$) el elemento $A_{5,k}$ es igual a cero, en los siguientes sumandos ($2 < k < 5$) ambos elementos $A_{5,k}$ y $B_{k,2}$ son iguales a cero, y en los últimos sumandos ($5 \leq k \leq 7$) el elemento $B_{k,2}$ es igual a cero.

Consideremos un elemento de la diagonal principal, por ejemplo $(AB)_{4,4}$:

$$(AB)_{4,4} = \underbrace{A_{4,1}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{1,4} + \underbrace{A_{4,2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{2,4} + \underbrace{A_{4,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} B_{3,4} + A_{4,4}B_{4,4} + A_{4,5} \underbrace{B_{5,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + A_{4,6} \underbrace{B_{6,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = A_{4,4}B_{4,4}.$$

Los primeros sumandos ($k < 4$) y los últimos ($k > 4$) son iguales a cero, y sólo se queda un sumando ($k = 4$).

Ahora estamos preparados para enunciar y demostrar la proposición general.

8. Teorema (producto de matrices triangulares superiores).
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Entonces $AB \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$, y las entradas diagonales del producto AB son productos de las entradas correspondientes de las matrices A y B:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad (AB)_{i,i} = A_{i,i} B_{i,i}.$$

Demostración. 1. Primero demostremos que AB es una matriz triangular superior. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j$. Demostremos que $(AB)_{i,j} = 0$. Por la definición del producto de matrices,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Dividamos esta sumatoria en tres partes:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} A_{i,k} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} A_{i,k} B_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

En las primeras dos sumatoria siempre $i > k$, por eso $A_{i,k} = 0$ (ya que A es triangular superior). En la segunda y tercera sumatorias siempre $k > j$, y por eso $B_{k,j} = 0$ (ya que B es triangular superior). Así pues,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (i>j\geq k)}} B_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (i>k)}} \underbrace{B_{k,j}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (k>j)}} + \sum_{k=i}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (k\geq i>j)}} = 0.$$

2. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la definición del producto de matrices,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,i},$$

Dividamos la sumatoria en 3 partes:

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (i>k)}} B_{k,i} + A_{i,i} B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,i}}_{\substack{\| \\ 0 \\ (k>i)}} = A_{i,i} B_{i,i}.$$

Así hemos demostrado la fórmula para $(AB)_{i,i}$. □

9. Nota (promesa para futuro). Más adelante en este curso demostremos el criterio de invertibilidad de una matriz triangular superior y demostremos que la matriz inversa de una matriz superior, cuando existe, también es triangular superior.

10. Tarea adicional (criterio de invertibilidad de una matriz triangular superior de orden 2). Usando sólo las definiciones determine cuándo es invertible la siguiente matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Matrices triangulares inferiores

11. Ejercicio. Escriba la definición de una matriz triangular inferior. Notación para el conjunto de todas las matrices triangulares inferiores: $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$.

12. Ejercicio. ¿Cuándo una matriz es triangular superior y al mismo tiempo triangular inferior?.

13. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. ¿Cuándo la matriz transpuesta $A^\top$ es triangular inferior?.

14. Ejercicio. Calcule el producto

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

15. Tarea adicional. Enuncie y demuestre el teorema sobre el producto de matrices triangulares inferiores.