Matriz transpuesta

Ejercicios

Objetivos. Aprender la regla para construir la matriz transpuesta, comprender su definición formal, observar las propiedades algebraicas de la transposición de matrices y aprender a demostrarlas.

Requisitos. Definición de las operaciones con matrices, demostración de las propiedades de las operaciones lineales con matrices, sumas y sus propiedades básicas.

Definición informal. Sea A una matriz. La *matriz transpuesta* de A, denotada por $A^\top$, se obtiene al intercambiar los papeles de renglones y columnas de la matriz A. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras,

$$\text{los renglones de la matriz } A^\top \text{ son } \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} \text{ de la matriz } A,$$

$$\text{y las columnas de la matriz } A^\top \text{ son } \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} \text{ de la matriz } A.$$

1. $$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}^\top = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & & & \end{array}\right].$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}^\top =$$

3. $$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 8 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix}^\top =$$

4. Determine los tamaños de las matrices transpuestas:

Si $A \in \mathcal{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$, entonces $A^\top \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$. Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, entonces $A^\top \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

Definición formal de la matriz transpuesta

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^\top = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad & \\ & \\ & \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, según el convenio general denotamos las entradas de $A^\top$ por $(A^\top)_{i,j}$:

$$A^\top = \begin{bmatrix} (A^\top)_{1,1} & (A^\top)_{1,2} & (A^\top)_{1,3} \\ (A^\top)_{2,1} & (A^\top)_{2,2} & (A^\top)_{2,3} \end{bmatrix}.$$

De aquí concluimos que:

$$(A^\top)_{1,1} = \qquad (A^\top)_{1,2} = \qquad (A^\top)_{1,3} =$$

$$(A^\top)_{2,1} = \qquad (A^\top)_{2,2} = \qquad (A^\top)_{2,3} =$$

6. Definición formal. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$A^\top \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Para cualquier par de índices (i, j), donde

$$i \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\}, \qquad j \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\},$$

la entrada de la matriz $A^\top$ con índices (i, j) es igual a:

$$(A^\top)_{i,j} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

7. Otra forma de la definición formal. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$A^\top = \Big[\qquad \Big]_{i,j=1}^{\ ,}.$$

Matriz transpuesta y las operaciones lineales

Sean

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 5.$$

8. Calcule $A + B$ y λA:

$$A + B = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}, \qquad \lambda A = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

9. Utilizando los resultados del ejericicio anterior calcule $(A + B)^\top$ y $(\lambda A)^\top$:

$$(A + B)^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad (\lambda A)^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

10. Calcule $A^\top$ y $B^\top$:

$$A^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad B^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

11. Utilizando los resultados del ejercicio anterior calcule $A^\top + B^\top$ y $\lambda A^\top$:

$$A^\top + B^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad \lambda A^\top = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

12. Resumen. Adivine las fórmulas para $(A + B)^\top$ y $(\lambda A)^\top$:

$$(A + B)^\top = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} \qquad\qquad (\lambda A)^\top = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

La transpuesta de la suma de matrices

13. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top.$$

Solución. Primero verifiquemos que las matrices $(A+B)^\top$ y $A^\top + B^\top$ son del mismo tamaño:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \arrow[r] \arrow[dl] & \boxed{A^\top \in \qquad\qquad} \arrow[dr] & \\
\boxed{\qquad\qquad\qquad} & \boxed{A+B \in \qquad\qquad} \arrow[l] & & & \boxed{\qquad\qquad\qquad} \\
 & & \boxed{B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \arrow[r] \arrow[ul] & \boxed{B^\top \in \qquad\qquad} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ahora vamos a demostrar que las entradas correspondientes de las matrices $(A+B)^\top$ y $A^\top + B^\top$ son iguales. Elijamos un par de índices arbitrarios (i, j) con

$$i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Calculemos la entrada de la matriz $(A+B)^\top$ con índices i, j:

$$\Big((A+B)^\top\Big)_{i,j} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(A+B)_{?,?}} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Luego calculemos la entrada de la matriz $A^\top + B^\top$ con índices i, j:

$$\Big(A^\top + B^\top\Big)_{i,j} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \qquad\qquad + \qquad\qquad \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \qquad\qquad + \qquad\qquad .$$

Resumen:

$$\Big((A+B)^\top\Big)_{i,j} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \Big(A^\top + B^\top\Big)_{i,j}.$$

Justificación:

(i) Definición de la matriz transpuesta.

(ii)

(iii)

(iv)

$\square$

La transpuesta del producto de una matriz por un escalar

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Solución. Verifiquemos que $(\lambda A)^\top$ y $\lambda A^\top$ son del mismo tamaño:

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Probemos que $\left((\lambda A)^\top\right)_{i,j} = \left(\lambda A^\top\right)_{i,j}$, donde i, j son índices arbitrarios tales que

$$i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Primero calculemos la entrada de la matriz $(\lambda A)^\top$ con índices i, j:

$$\left((\lambda A)^\top\right)_{i,j} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\text{(ii)}}{=\!=}$$

Luego calculemos la entrada de la matriz $\lambda A^\top$ con índices i, j:

$$\left(\lambda A^\top\right)_{i,j} \overset{\text{(iii)}}{=\!=} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\text{(iv)}}{=\!=}$$

Justificación:

(i)

(ii)

(iii)

(iv) $\square$

La transpuesta del producto de matrices

15. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Solución. Verifiquemos que $(AB)^\top$ y $B^\top A^\top$ son del mismo tamaño:

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})}$$

Vamos a demostrar que $(AB^\top)_{i,j} = (B^\top A^\top)_{i,j}$ para cualesquiera i, j, donde

$$i \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Calculemos la entrada de la matriz $(AB)^\top$ con índices i, j:

$$\Big((AB)^\top\Big)_{i,j} =$$

Calculemos la entrada de la matriz $B^\top A^\top$ con índices i, j:

$$\Big(B^\top A^\top\Big)_{i,j} =$$

Justificación:

$\square$