Matriz transpuesta

Objetivos. Conocer el concepto de la matriz transpuesta y estudiar las propiedades básicas de la operación $A \mapsto A^\top$ que transforma cada matriz en su transpuesta.

Requisitos. Matrices, notación breve para definir matrices, operaciones con matrices.

1. Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces la *matriz transpuesta* de la matriz A, denotada por $A^\top$, es la siguiente matriz:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de la matriz A son columnas de la matriz $A^\top$, y las columnas de la matriz A son renglones de la matriz $A^\top$. Se puede notar que, por ejemplo, la entrada $(3,1)$ de la matriz $A^\top$ es la entrada $(1,3)$ de la matriz A:

$$(A^\top)_{3,1} = -7 = A_{1,3}.$$

Con este ejemplo nos preparamos a la definición formal.

2. Más ejemplos.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^\top = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 7 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B^\top = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C^\top = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una relación entre los tamaños de A y $A^\top$, escriba $(A^\top)_{2,1}$ como $A_{p,q}$ con algunos subíndices p y q; escriba $(A^\top)_{1,3}$ como $A_{r,s}$ con algunos subíndices r y s.

Con estos ejemplos nos preparamos a la definición formal.

3. Definición (la transpuesta de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces la *matriz transpuesta* de A, la cual denotamos por $A^\top$, se define mediante la regla

$$A^\top \coloneqq \left[A_{j,i}\right]_{i,j=1}^{n,m}.$$

Esto es,

$$A^\top \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F}),$$

y para cualquier par de índices (i,j), donde $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$(A^\top)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Otras notaciones comunes para la matriz transpuesta: A^τ, A^T, A', A^t, ${}^tA$.

4. La transpuesta de una matriz en sistemas de álgebra computacional. Investigue cómo se denota la transpuesta de una matriz en sistemas de álgebra computacional. Ejemplos: MATLAB (y sus análogos libres GNU Octave, Scilab, FreeMat), Maxima, Wolfram Mathematica, Python + numpy, Sage.

5. Tarea opcional: programar la función que calcule la transpuesta de una matriz. En algún lenguaje de programación escriba una función que construya la transpuesta de una matriz. Aquí está un programa en el lenguaje Python escrita de manera muy ingenua, con dos ciclos:

```
def mytranspose(A):
   m = len(A);
   n = len(A[0]) if (m > 0) else 0
   B = [0] * n
   for j in range(n):
      B[j] = [0] * m
      for k in range(m):
         B[j][k] = A[k][j]
   return B

A = [[-3, 7, 2], [4, 5, -1]]
print("A = " + str(A) + "\n" + "transpose(A) = " + str(mytranspose(A)))
```

Por supuesto, en Python hay soluciones más breves y más eficientes.

Propiedades de la transposición de matrices

La operación (función) que convierte A en $A^\top$ se puede llamar la *transposición* de matrices. Vamos a establecer propiedades básicas de esta operación: notamos que esta operación es *involutiva* (al aplicarla dos veces regresamos a la matriz original) y estudiamos su interacción con otras operaciones algebraicas.

6. Ejercicio para observar que la transpoción de matrices es involutiva, aditiva y homogénea. Están dadas dos matrices A y B del mismo tamaño y un número λ: Calcule las matrices , donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 5.$$

I. Calcule las matrices $A^\top$ y $B^\top$.

II. Calcule la matriz $(A^\top)^\top$, esto es, la transpuesta de la matriz $A^\top$.

III. Calcule las matrices $A + B$, $(A + B)^\top$ y $A^\top + B^\top$.

IV. Calcule las matrices λA, $(\lambda A)^\top$ y $\lambda A^\top$.

Basándose en los resultados de los incisos II, III, IV enuncie reglas generales.

7. Ejercicio: la transpuesta del producto de dos matrices. Calcule AB, $AB^\top$, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top B^\top$ y $B^\top A^\top$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Otro ejercicio: la transpuesta del producto de dos matrices. Calcule AB, $(AB)^\top$, $A^\top$ y $B^\top$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine cuál de los dos productos $A^\top B^\top$ o $B^\top A^\top$ está definido y calcúle este producto. Encuentre una relación entre este producto y la matriz $(AB)^\top$.

9. Observación (sobre el tamaño de la matriz transpuesta del producto de dos matrices). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$. Determine los tamaños de las matrices AB, $(AB)^\top$, $A^\top$ y $B^\top$:

$AB \in$ $\qquad\qquad$ $(AB)^\top \in$ $\qquad\qquad$ $A^\top \in$ $\qquad\qquad$ $B^\top \in$

Intente a adivinar cómo se expresa la matriz $(AB)^\top$ a través de $A^\top$ y $B^\top$:

$$(AB)^\top =$$

Con estos ejercicios nos preparamos al siguiente teorema.

10. Teorema (propiedades de la transposición de matrices).

1. $(A^\top)^\top = A \quad$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top \quad$ para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.
3. $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top \quad$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y todo $\lambda \in \mathbb{F}$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top \quad$ para todas $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$.

Demostración. 1. Según la definición, $A^\top \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, luego $(A^\top)^\top \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, así que las matrices $(A^\top)^\top$ y A son del mismo tamaño. Calculemos la (i,j)-ésima entrada de $(A^\top)^\top$:

$$\big((A^\top)^\top\big)_{i,j} = (A^\top)_{j,i} = A_{i,j}.$$

Las demostraciones de las propiedades 2 y 3 también son muy simples y se dejan como ejercicios.

4. Demostremos la propiedad más interesante, $(AB)^\top = B^\top A^\top$. Primero, determinemos las tamaños de las matrices. La matriz AB es de tamaño $m \times p$, por eso $(AB)^\top$ es de tamaño $p \times m$. La matriz $B^\top$ tiene tamaño $p \times n$, $A^\top$ tiene tamaño $n \times m$, por eso $B^\top A^\top$ tiene tamaño $p \times m$. Resumen: las matrices $(AB)^\top$ y $B^\top A^\top$ son del mismo tamaño.

Calculemos la (i,j)-ésima entrada de $(AB)^\top$:

$$\big((AB)^\top\big)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,i}.$$

Ahora calculemos la entrada (i,j) entrada del producto $B^\top A^\top$:

$$(B^\top A^\top)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (B^\top)_{i,k} (A^\top)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,i} A_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,i}.$$

En el último paso usamos el hecho que la multiplicación en $\mathbb{F}$ es conmutativa. Hemos mostrado que

$$\big((AB)^\top\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} B_{k,i} = (B^\top A^\top)_{i,j}.$$ □