Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante α.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad xy \geqslant -2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(2) + 5f(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -4 + x + 4x^3, \qquad f_2(x) = -1 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 4 + x + x^2 - 2x^3,$$

$$g(x) = -1 + x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 - 2x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + 4x^2, \qquad f_3(x) = x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -2a_1 - 5a_2, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 5b_1 + b_2 - 4b_3 + b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 4b_2 + 4b_3 + 5b_4, \quad c_3 = 6b_1 - b_2 - 3b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + a_2, \quad b_3 = -2a_1, \quad b_4 = a_1 - 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = -3a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_4 = 3a_1 - a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 4a_1 + 3a_3, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 - 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante β.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad (x+3)^2 + y^2 \leqslant 16 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(4) + 4f(4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -3 + x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = 4 + 3x + 3x^2 + 4x^3,$$

$$g(x) = -1 - x + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 2x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 5a_1 + a_2, \quad b_2 = -5a_1 - 5a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 5a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = -2b_1 + 4b_2 + 4b_3 - b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 6b_2 + 4b_3 + b_4, \quad c_3 = 2b_1 + b_2 + b_3 - 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 - 4a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 3a_1, \quad b_4 = 3a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 3a_3, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_4 = a_1 + 4a_2 - 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 4a_3 + a_4, \quad b_2 = a_1 + a_3 + 4a_4, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 + 3a_3 + 4a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = -4 + 2x + 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 1 AJAS.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x + 3y \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 0 \quad \wedge \quad f'(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 3 - x + 3x^2 + 4x^3,$$

$$g(x) = 1 - 2x - 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + x + x^2, \qquad f_2(x) = -6 + 3x + 4x^2, \qquad f_3(x) = 4 - 2x + 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 5a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 - 4a_2, \quad b_3 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

$$c_1 = b_1 + 3b_3 - b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 2b_2 - 6b_3 + 4b_4, \quad c_3 = -6b_1 + 3b_2 + 2b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -2a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 2a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 - a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2 - a_3, \quad b_3 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad b_4 = -3a_1 + 2a_2 + 5a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -4 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = x + 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 2 BTCF.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 3x + 2|y| = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x - x^2, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x - x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 6a_2, \quad b_3 = -4a_1 - 5a_2, \quad b_4 = 4a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 3b_2 + 2b_3 + b_4, \quad c_2 = -b_1 + 6b_2 + 5b_3 + 2b_4, \quad c_3 = -b_1 + 4b_2 + 3b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \quad b_2 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 - 6a_3, \quad b_2 = a_1 - 2a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 3a_2 - 6a_3, \quad b_4 = a_1 + a_2 - 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -4a_1 + 4a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_2 = -a_1 + 2a_2 + a_4, \quad b_3 = -a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 5 + 4x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 4x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 3 CSA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-2) + 4f(-2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = -1 - x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = -2 - 2x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_3(x) = 4 + x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = -a_1, \quad b_3 = a_1 + 6a_2, \quad b_4 = 6a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = b_1 + b_2 - 2b_3 - 2b_4, \quad c_2 = 4b_1 + 3b_2 - 5b_3 + 6b_4, \quad c_3 = 6b_1 - 5b_2 - 4b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \quad b_2 = -4a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 - 2a_2, \quad b_2 = 4a_1 - 3a_2 - a_3, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 - 4a_3, \quad b_4 = 2a_1 + a_2 - 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -2a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 - x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 4x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \; f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \; \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 4 CNKM.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad xy \leqslant 4 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-2) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 - 3x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 2 - x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + 2x^3,$$
$$g(x) = 2 + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 4 + x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -4a_1 + 6a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = a_1 - 3a_2.$$

$$c_1 = 4b_1 - 4b_2 + 4b_3 + 5b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 6b_4, \quad c_3 = -2b_1 + 3b_2 + 2b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -4a_1 - 4a_2, \quad b_4 = -a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 - 4a_2 + 6a_3, \quad b_2 = 4a_1 + 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_4 = 4a_1 + a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4, \quad b_2 = 4a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4, \quad b_3 = -2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 4x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(-2) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 5 CNLE.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 4y \geqslant x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 3x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -1 + x + 2x^2, \qquad f_3(x) = -2 + 4x + 4x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 - 2x - x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 3x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 1 - 2x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = 5a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -5a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 6a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 + 2b_2 + 5b_3 + 2b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 2b_3 + 4b_4, \quad c_3 = -2b_1 - b_2 + b_3 + 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = -3a_1 - 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_3 = -a_1 + 4a_2 - 2a_3, \quad b_4 = -2a_1 + 3a_2 - 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 3x + x^2, \qquad f_2(x) = 5 - x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 6 DPE.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x = 3y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \wedge \quad f'(3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + 4x^3, \qquad f_3(x) = -1 + 2x + 4x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 3 - 3x - 2x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x^2, \qquad f_2(x) = 4 + x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1 - 3a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 + 3b_2 - 4b_3 - b_4, \quad c_2 = 5b_1 - 2b_2 + 4b_3 + 3b_4, \quad c_3 = 6b_1 + b_2 + 2b_3 - 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 4a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + 3a_2 - 4a_3, \quad b_2 = 4a_1 + 2a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 - 2a_3, \quad b_4 = 2a_2 - 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4, \quad b_2 = 4a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4, \quad b_3 = 2a_1 + 2a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + x + 5x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(-3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 7 DEER.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x + 2y \neq 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(-3) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 2x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -1 + 2x, \qquad f_3(x) = 1 - 2x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 5a_1 + a_2, \quad b_3 = 4a_1, \quad b_4 = 2a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = -b_1 + 3b_2 - 5b_3 + 3b_4, \quad c_2 = -6b_1 + 3b_2 + 2b_3 + b_4, \quad c_3 = 5b_1 - 5b_2 + 4b_3 - 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 - a_3, \quad b_2 = a_1 - 4a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 - 2a_2 + a_3, \quad b_4 = -4a_1 + 2a_2 - a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 4a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 5x + 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 8 DLRTH.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 2x + 3y \leqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x - x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + x - x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 2 - 2x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 - 2x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 2 - x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 - 3a_2, \quad b_2 = a_1 + 5a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 3a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4, \quad c_2 = -2b_1 - 6b_2 + b_3 + 5b_4, \quad c_3 = 2b_1 + 3b_2 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -2a_1 + 4a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 - 3a_2 + 3a_3, \quad b_2 = -4a_1 + 4a_2 - 4a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_3, \quad b_4 = a_1 - a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4, \quad b_2 = 4a_1 + a_2 - a_3, \quad b_3 = -2a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -2 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 9 DGGI.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad xy \geqslant -3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-3}^{-1} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2, \qquad f_2(x) = -3 + x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = -2 + x + 3x^2 + x^3,$$

$$g(x) = x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -3 + 4x + x^2, \qquad f_2(x) = -2 + 3x + x^2, \qquad f_3(x) = -1 - 3x - 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 6a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_4 = -5a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = b_1 + 6b_2 + 3b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 6b_2 - b_3 + 4b_4, \quad c_3 = 3b_2 + 2b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = -a_1 + 4a_2, \quad b_4 = 5a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2 + 5a_3, \quad b_3 = -2a_1 - 4a_2 - 6a_3, \quad b_4 = -4a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 4a_1 - a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 - a_2 + a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 5x, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -9 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 10 DJRA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-2) + 5f(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - 2x - x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^3, \qquad f_3(x) = 1 - x - x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = -x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 5 + 4x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -2a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 5a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 5a_2, \quad b_4 = a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 4b_2 + 5b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 3b_2 + 4b_4, \quad c_3 = -3b_1 + b_2 - b_3 - 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = -2a_1, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 - 3a_3, \quad b_2 = a_1 - 2a_2 + a_3, \quad b_3 = -a_1 + 5a_2 - 4a_3, \quad b_4 = 3a_1 - 5a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_3 - 2a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad b_3 = a_1 + a_2 + 2a_3 - a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 4x + x^2, \qquad f_2(x) = 3 - 2x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 11 FMFD.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x = -y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 4x + x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = -1 - 2x - x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 3x - x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 4x - x^2, \qquad f_3(x) = -3 - 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = -6a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 6a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = -3b_1 - 2b_2 + 5b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 2b_1 + 2b_2 - b_3 + b_4, \quad c_3 = -3b_1 + 5b_2 + 3b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = 4a_1 + a_2, \quad b_4 = -a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 5a_1 - a_2 + 4a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 2a_2 + a_3, \quad b_4 = a_1 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 3a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad S_2 = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f(-3) = 0\big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \mathrm{tr}(X) = 0\big\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 12 GDLD.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 9 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(1) + 5f(1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 3x + x^2 + 2x^3,$$
$$g(x) = -1 - x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -2a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = -a_1, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 5b_2 - 3b_3, \quad c_2 = -b_1 - 5b_2 + 6b_3 - 5b_4, \quad c_3 = 5b_1 + 5b_2 + 4b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -3a_1 - 4a_2, \quad b_4 = -a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 4a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 3a_1 + 4a_2 - a_3, \quad b_4 = a_1 - 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = 3a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 3a_4, \quad b_3 = 3a_2 - a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 3x + x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 2x, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(-3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 13 GLMA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x = 3y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) + 5f(-3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 3x^2, \qquad f_3(x) = 2 + x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -3a_1 + a_2, \quad b_2 = 5a_1, \quad b_3 = 5a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -3a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 4b_2 + 3b_3 + 4b_4, \quad c_2 = -6b_1 + 2b_2 - b_3 + 2b_4, \quad c_3 = 6b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + 4a_2, \quad b_2 = a_1, \quad b_3 = 4a_1 + 4a_2, \quad b_4 = a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 - a_2 + 4a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 - 3a_3, \quad b_3 = 4a_1 - a_2 + 5a_3, \quad b_4 = 4a_2 - 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 2a_2 + a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -3 + 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -3 + x + x^2, \qquad S_2 = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f(-1) = 0\big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 14 GSLE.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 4x - y \neq 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_2^3 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 4x + 2x^2 + 2x^3,$$
$$g(x) = -1 - 2x + 2x^2 - 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 - 3a_2, \quad b_2 = 3a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 4a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

$$c_1 = -b_1 - b_2 + 2b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 4b_1 - b_2 + b_3 + 3b_4, \quad c_3 = -5b_1 - 6b_2 + 5b_3 + 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -a_1 + 3a_2, \quad b_2 = -2a_1 + a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + 4a_2 - 2a_3, \quad b_2 = 5a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 5a_2 - 3a_3, \quad b_4 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 4a_3 + 3a_4, \quad b_2 = a_2 - a_3 + 2a_4, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 - 2a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 4x + 3x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 15 KSJG.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x - 3y \neq 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 3x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - 3x^2, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 - 2x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 4 - 2x + 3x^2, \qquad f_3(x) = -2 - 4x - 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -3a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 5a_1 + 5a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 + 2b_2 - 3b_3 - 3b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 6b_2 + 4b_3 + 5b_4, \quad c_3 = -3b_1 - b_2 + b_3 + 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_2, \quad b_2 = a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -4a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -2a_1 - a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_3 = -2a_1 - 3a_2 - 2a_3, \quad b_4 = -2a_1 + 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 - 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 3 + x + 4x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 16 LSS.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2 + 4x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = -2 - 2x - 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 5 + 3x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -2a_1 - a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 6a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 + 2b_2 - b_3 + b_4, \quad c_2 = 5b_1 - 2b_2 + 2b_3 - 3b_4, \quad c_3 = -3b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 - 2a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -3a_1 - a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_3 = a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -3a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 2a_4, \quad b_3 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 3x - 3x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 17 LPS.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad xy \leqslant -1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \wedge \quad f'(3) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -1 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 2 + x + 2x^2,$$

$$g(x) = 1 - x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -4 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2, \qquad f_3(x) = 5 + 6x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + 5a_2, \quad b_2 = 5a_1 - 6a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 4a_1 - 6a_2.$$

$$c_1 = -4b_1 + 6b_2 + 3b_3 - 6b_4, \quad c_2 = -2b_1 + 3b_2 + 3b_3 - 5b_4, \quad c_3 = b_1 - 6b_2 + b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_3 = -2a_1, \quad b_4 = a_1 - 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_3, \quad b_3 = -2a_1 - 2a_2 - 2a_3, \quad b_4 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 5 + 2x - x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x - x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 18 MPDD.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 2|x| + 3|y| \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \wedge \quad f'(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 4 + x + 4x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = -2 + x + 2x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + x + x^2, \qquad f_2(x) = -1 + 2x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -4a_1 + 5a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = -4b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 2b_2 + 3b_3 - 3b_4, \quad c_3 = 3b_1 + b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 4a_1 - 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_3 = -4a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4, \quad b_2 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -3 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 2x + 5x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 19 MHF.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \leqslant x^2 - 6x + 4 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_1^2 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x - 2x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 1 - x + 2x^2 + x^3,$$

$$g(x) = x - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 4x + 3x^2, \qquad f_3(x) = -3 - 2x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 6a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 6a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -2a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 3b_2 - b_3 + 2b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 3b_2 - 6b_3 + b_4, \quad c_3 = 6b_1 - b_2 - 5b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + 5a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 - a_2, \quad b_4 = -4a_1 + 2a_2 - 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = -a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 20 MME.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2xy \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-4) + 4f(-4) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = -2 + x + 3x^2 - 2x^3,$$

$$g(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 - 2x + 5x^2, \qquad f_2(x) = 3 - 2x + 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 - 4a_2, \quad b_2 = -3a_1 + 3a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = -6b_2 - 3b_3 + 6b_4, \quad c_2 = 5b_1 + 5b_2 - 2b_3 + 2b_4, \quad c_3 = 4b_1 + 4b_2 - 3b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -4a_1 - a_2, \quad b_4 = -4a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 4a_1 - 3a_2 + 6a_3, \quad b_2 = -4a_1 - 2a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 - 4a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 - 6a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4, \quad b_2 = a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4, \quad b_3 = -a_1 + a_3 - 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -2 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -4 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 21 MRCK.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x + 3y \leqslant 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \wedge \quad f'(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -3 + 3x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 2x + 2x^2 + x^3,$$

$$g(x) = -1 + x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = -4 + 2x + x^2, \qquad f_3(x) = -4 - 4x + 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -5a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 3a_2, \quad b_3 = 6a_1 + a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

$$c_1 = -3b_1 - 4b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 5b_1 + 5b_2 + b_3 + 6b_4, \quad c_3 = 6b_1 + 6b_2 + 4b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -2a_1 - 2a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = -2a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 + 3a_2 - a_3, \quad b_2 = 3a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 3a_1 + 4a_2 + 7a_3, \quad b_4 = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 22 PHJL.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 5x - 2y \leqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 2x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 2 - x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 - x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -3a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -3a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 5a_1 - 2a_2, \quad b_4 = a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = b_1 - b_2 + 3b_3 + 3b_4, \quad c_2 = -b_1 + 3b_2 + b_3 + b_4, \quad c_3 = -5b_1 + 5b_2 - b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 5a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -a_1 - 2a_2, \quad b_4 = a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 - a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 + a_3, \quad b_4 = 5a_1 + a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad b_3 = -4a_1 - a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 5x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 23 RAJA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x + |y| = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) + 3f(-3) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 + 3x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 4 + 3x + 2x^2,$$

$$g(x) = -1 - x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 - 4x - x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 5x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 2x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -3a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 - 4a_2, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -6a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 5b_1 + 6b_2 + 2b_3 + 2b_4, \quad c_2 = b_1 - 6b_2 - 4b_3 - b_4, \quad c_3 = b_1 + 2b_2 - 2b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -a_1 - 3a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -2a_1.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_4 = a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 - x + 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\; f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\;\; \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 24 RCE.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x \leqslant y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 3x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_3(x) = 1 + 3x + 2x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = -2 - x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 4x - x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 - 5a_2, \quad b_2 = 6a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -3a_1 - 2a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = -2b_1 + 3b_2 + 6b_3 + 3b_4, \quad c_2 = 4b_2 + 6b_3 - 4b_4, \quad c_3 = 4b_1 - 6b_2 - 4b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + a_2, \quad b_2 = -3a_1 - 3a_2, \quad b_3 = 3a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 4a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 - a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_4 = -3a_1 - 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -4a_1 + a_2 + a_4, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_3 = -3a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\; f'(1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\; \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 25 RDIDJ.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geqslant x^2 + 4x - 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-1}^{3} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 3 + 3x + 4x^2 + 4x^3,$$

$$g(x) = -1 + x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - 4x^2, \qquad f_3(x) = 1 + 2x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 3a_1 - 5a_2, \quad b_3 = 5a_1, \quad b_4 = 6a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = -4b_1 - 4b_3 + 6b_4, \quad c_2 = -2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4, \quad c_3 = 3b_1 - 2b_2 + b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 4a_2, \quad b_3 = a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = -a_1 - a_2, \quad b_3 = -3a_1 + a_2 - 4a_3, \quad b_4 = 5a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -2 + 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -1 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \; f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \; \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 26 SRGA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x^2 + (y-4)^2 \leqslant 25 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-4) + 5f(-4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 2x + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 2 + 2x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 + 6a_2, \quad b_2 = 5a_1 + a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = -3b_1 + 4b_2 + 2b_3 - 2b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 5b_3 + 6b_4, \quad c_3 = 2b_1 - 6b_2 - 2b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -2a_1 + a_2, \quad b_2 = -a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 5a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_2 = -2a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2 - 4a_3, \quad b_4 = a_1 - 4a_2 - 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 - 2a_3 - 3a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + 4a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 3x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 27 TMMA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2y \leqslant -x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(0) + 5f(0) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -3 + x + 2x^3, \qquad f_3(x) = 3 + 3x + 2x^2 - x^3,$$

$$g(x) = 1 + 2x + x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 - 2x - 3x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + 3x^2, \qquad f_3(x) = x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 6a_2, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 6a_2.$$

$$c_1 = -2b_1 - b_2 + 4b_3 + 4b_4, \quad c_2 = b_1 + b_2 - 3b_4, \quad c_3 = 5b_1 + b_2 + 4b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = -2a_1 - 3a_2, \quad b_3 = a_1 - 4a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 - a_2 - 3a_3, \quad b_3 = -a_1 + 4a_2 + 5a_3, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 5x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 28 TELD.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + 4|y| \leqslant 4 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 - x - 3x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -1 + 4x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x - x^2 + x^3,$$
$$g(x) = -1 + x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 - b_2 + b_3 + 3b_4, \quad c_2 = -2b_1 + 2b_2 + 2b_3, \quad c_3 = 2b_1 + 3b_2 - 2b_3 - 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -4a_1, \quad b_4 = -4a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = -2a_1 + 4a_2 + 2a_3, \quad b_4 = 4a_1 + 3a_2 + 7a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 - 4a_2 + 3a_3 + 2a_4, \quad b_2 = 3a_1 - a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_3 = 2a_1 - 2a_2 + a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 5 - 2x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 4 - 3x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 29 UTAV.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 3x - y \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-1) + 2f(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 2x + x^2 - x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + x^3,$$
$$g(x) = -x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 + 3x - 5x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 5x - 3x^2, \qquad f_3(x) = 3 + 4x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + a_2, \quad b_2 = -4a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 4a_1 + a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

$$c_1 = -b_1 + 4b_2 + 2b_3 + b_4, \quad c_2 = 6b_2 + b_3 + b_4, \quad c_3 = 4b_1 - 3b_2 - 3b_3 - 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 5a_2, \quad b_3 = a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 - a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_4 = -4a_1 - a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 3a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 2x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 30 VNDI.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2: \quad 3|x| + 2|y| = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \quad f'(1) + 2f(1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 4x + x^2 - 3x^3, \qquad f_2(x) = x + x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 2x + x^2 - 2x^3,$$

$$g(x) = 1 - x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \quad b_2 = 4a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 - 5b_2 + b_3, \quad c_2 = 5b_1 + b_2 - 5b_3 + 6b_4, \quad c_3 = 5b_1 - 6b_2 + 2b_3 + 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -2a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_4 = -a_1 - a_2 - a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 + 4a_4, \quad b_2 = 2a_1 - 3a_2 + a_3 - 2a_4, \quad b_3 = a_1 + a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 - x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \mathrm{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 31 VHA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 \leqslant 16 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-1) + 5f(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 3 - 3x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = -x + 2x^2 - x^3,$$

$$g(x) = 1 - x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + 3x^2, \qquad f_3(x) = 1 + 3x + 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 - 4a_2, \quad b_2 = -2a_1 - 3a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 2b_2 + b_3 + 4b_4, \quad c_2 = b_1 - 6b_2 - 5b_3 + 2b_4, \quad c_3 = -4b_1 + b_2 - 4b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 - 3a_3, \quad b_2 = 3a_1 + a_2 - 4a_3, \quad b_3 = 4a_1 + a_2 - 5a_3, \quad b_4 = -4a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 32 VMJJ.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x + 2y \leqslant 4 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 0 \quad \wedge \quad f'(3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -4 + 2x + 4x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -4 + x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = -2 + x + 2x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 2x - x^2 - 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 4 + x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + 4a_2, \quad b_2 = -a_1 + 5a_2, \quad b_3 = 4a_2, \quad b_4 = a_1 + 6a_2.$$

$$c_1 = -b_1 + 6b_2 - 6b_3 + 3b_4, \quad c_2 = -5b_1 + 3b_2 - 6b_3 + 5b_4, \quad c_3 = b_1 + 3b_2 + b_3 - 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -2a_1 - 4a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_2 = -2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 2a_2 - a_3, \quad b_4 = -3a_1 + 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_4, \quad b_2 = 4a_1 - a_2 - 3a_3 + a_4, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 4x + x^2, \qquad f_2(x) = 5 - 2x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \ f'(2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 33 GMOA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad \frac{x^2}{9} + y^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(1) + 3f(1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 2x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$
$$g(x) = -2 - x - 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = -2 + x + 3x^2, \qquad f_3(x) = 3 + 2x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 5a_1, \quad b_2 = a_1 + 6a_2, \quad b_3 = 5a_1 - a_2, \quad b_4 = -3a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = -2b_1 + 3b_2 + 5b_3 + 2b_4, \quad c_2 = -2b_1 + 4b_2 - b_3 - 3b_4, \quad c_3 = 3b_1 - 4b_2 + 3b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 + a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = 4a_1 + a_2 + 5a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 4a_2 - a_3, \quad b_4 = 3a_1 + a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 4a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x + 4x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 34 VALA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3|x| + |y| \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 4x + 3x^2 - x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_3(x) = 1 - 2x - 2x^3,$$
$$g(x) = 3 + 2x + 2x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + 6a_2, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -3a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 4b_2 - 6b_3 - 5b_4, \quad c_2 = -5b_1 + 6b_2 + 5b_3 + b_4, \quad c_3 = -3b_1 + b_2 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 2a_1 - 2a_2, \quad b_4 = -a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 4a_1 + 5a_2 - 3a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 - a_3, \quad b_3 = 3a_2 + 3a_3, \quad b_4 = a_1 - 3a_2 - 5a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -2a_1 - a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = -2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f'(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 35 ZPJ.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2y = -x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 - 3x + x^2 + 4x^3, \qquad f_2(x) = -x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 - x + x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = 2 - x - x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 - x + 2x^2, \qquad f_2(x) = -3x - 3x^2, \qquad f_3(x) = 4 - x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + a_2, \quad b_2 = -5a_1 - a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 5a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = b_1 + 3b_2 + 2b_3 + 4b_4, \quad c_2 = -5b_1 + 5b_2 + 2b_3 + 6b_4, \quad c_3 = -6b_1 - 4b_2 + b_3.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 6a_1 - 2a_2 + 4a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 3a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 2x + 5x^2, \qquad f_2(x) = -1 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 36 BRMF.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 16 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(4) + 5f(4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + 4x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 - 2x - 2x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + 4x + x^2, \qquad f_2(x) = -3 + 5x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + 5a_2, \quad b_2 = 4a_1 + 6a_2, \quad b_3 = -a_1 + 4a_2, \quad b_4 = -a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = 5b_2 - 3b_3 + 5b_4, \quad c_2 = 6b_1 - 3b_2 - 3b_3 + 2b_4, \quad c_3 = b_1 - 3b_2 + 2b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = -2a_2, \quad b_3 = -2a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 - a_2 - 5a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 4a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 5a_2 + 7a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 - 3a_4, \quad b_2 = a_1 - a_3 - 2a_4, \quad b_3 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = x + 3x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 37 RMIA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + 3|y| \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-3) + 2f(-3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 + x - x^2 - 3x^3, \qquad f_2(x) = -1 + x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^2 - x^3,$$

$$g(x) = -2 - x + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -4 + 2x - 2x^2, \qquad f_2(x) = -3 + 4x + x^2, \qquad f_3(x) = -2 + 3x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 + 5a_2, \quad b_2 = -4a_1 - 6a_2, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 4b_2 + b_3 + 5b_4, \quad c_2 = 5b_1 + 4b_2 + b_3 - 4b_4, \quad c_3 = -b_1 - 5b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_2 = 4a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -3a_1 + 5a_2 + 2a_3, \quad b_2 = -a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_3 = -4a_1 + 4a_2, \quad b_4 = -3a_1 + a_2 - 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 - 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 3 + 3x + x^2, \qquad S_2 = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f(3) = 0 \}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 38 MRHA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 5|x| + 2|y| \leqslant 10 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 2x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x - x^3,$$

$$g(x) = 1 - x + x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 5x - 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 4x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 5a_1, \quad b_4 = -4a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 + 6b_2 - 2b_3 - b_4, \quad c_2 = -5b_1 - b_2 + 5b_3 + 3b_4, \quad c_3 = -3b_1 + 5b_2 + 6b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1, \quad b_2 = a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -2a_1 - 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -2a_1 - 4a_2 - 2a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_3 = -4a_1 + 2a_2 + 6a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + 4a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -4 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = -2 + x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \ f'(2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 39 AVMA.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x \leqslant 2y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \wedge \quad f'(-2) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x - 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = 2 - 2x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 2 + x - 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 5 + 4x - 3x^2, \qquad f_3(x) = -2 - 2x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -3a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_3 = 6a_1 + 5a_2, \quad b_4 = -4a_1 - 2a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 4b_2 + 4b_3 + 5b_4, \quad c_2 = -3b_1 - 6b_2 + 2b_3 - 5b_4, \quad c_3 = 2b_1 + 5b_2 - b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 4a_2, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 + 4a_3, \quad b_2 = -a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_3 = -2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_4 = -2a_1 + 2a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 - 4x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 4x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \; f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \; \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 40 MCCO.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 3x - 2y \leqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \wedge \quad f'(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - x + 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 - x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2x + 2x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 2 + 2x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 3x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 - 2a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 6a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

$$c_1 = b_1 + 5b_2 - 5b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 3b_1 - 6b_2 + 3b_3 - 4b_4, \quad c_3 = 4b_1 + 4b_2 - 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 - a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -a_1 - 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 - 4a_3, \quad b_4 = 2a_1 + 4a_2 - 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = a_1 - 3a_2 + a_3, \quad b_3 = 4a_1 - 4a_2 + 3a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 3 + x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 41.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x - y \geqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-1) + 4f(-1) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 4 + 4x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 4x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 1 + x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 - 3a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 6a_2, \quad b_4 = a_1 + 5a_2.$$

$$c_1 = 2b_1 + 6b_2 + 3b_3 - 4b_4, \quad c_2 = 4b_1 - 5b_2 + 5b_3 - 3b_4, \quad c_3 = b_1 - 2b_2 + b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -a_1 + 4a_2, \quad b_4 = a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_2 = -a_1 - a_2 - a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \mathrm{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 42.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 3 + 2x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^3,$$
$$g(x) = 2 - x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = 2 + 3x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 5a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 5a_2, \quad b_4 = 2a_1 - 2a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 + 2b_2 - b_3 - 4b_4, \quad c_2 = b_1 - b_2 + 5b_3 + 5b_4, \quad c_3 = -3b_1 + b_2 + b_3 - 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 - a_2, \quad b_2 = -4a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = 3a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 - 2a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_3 = -2a_1 - 4a_2 - 2a_3, \quad b_4 = a_1 + 4a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = -2a_1 + 4a_2 + 3a_3 + a_4, \quad b_3 = 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 2x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 2x + x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 43.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2: \quad 3y = x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \quad f'(1) + 4f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 - x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 4 - x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 - x + x^2,$$

$$g(x) = -2 + x - x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -5 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 3 - 4x + x^2, \qquad f_3(x) = -4 + x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 + a_2, \quad b_2 = -5a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1 + 5a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = -6b_1 - 3b_2 + b_3 - b_4, \quad c_2 = b_1 + 6b_2 - 4b_3 + 6b_4, \quad c_3 = -2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -a_1, \quad b_3 = 4a_1 - a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 - 4a_2 + a_3, \quad b_2 = -a_1 + a_2, \quad b_3 = -3a_1 - 3a_2 + 3a_3, \quad b_4 = 3a_1 - 5a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -1 + 2x + 5x^2, \qquad f_2(x) = -2 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 44.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \leqslant x^2 + 6x + 5 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-3}^{3} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -3 - 2x + x^2, \qquad f_3(x) = 2 - x + x^2 + x^3,$$
$$g(x) = -1 - x - x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 6a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 5a_1 - 2a_2, \quad b_3 = -2a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = 4b_1 - 2b_2 + b_3 + 4b_4, \quad c_2 = -b_1 + b_2 - 2b_3 + b_4, \quad c_3 = 4b_1 - 5b_2 + b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + a_2, \quad b_2 = -4a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_2 = -a_1 + 5a_2 + 4a_3, \quad b_3 = -6a_1 + 2a_2 - 4a_3, \quad b_4 = a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2a_4, \quad b_2 = 2a_1 + a_3 + 4a_4, \quad b_3 = a_1 + a_2 + 2a_3 - a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 4 + 4x + x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 45.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2|x| + y = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(0) + 4f(0) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 2x - 2x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + x - 2x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*

Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*

Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = -4 + x - 3x^2, \qquad f_3(x) = 1 + 2x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*

Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -3a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 3a_1 - a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 5b_4, \quad c_2 = 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 - 2b_4, \quad c_3 = 6b_1 + 4b_2 + b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 4a_1, \quad b_4 = -2a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad b_2 = -2a_2 - 2a_3, \quad b_3 = -2a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_4 = 3a_1 + a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_3 = 4a_1 + 4a_2 - a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 5x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 46.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2y \geqslant x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(-2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = x - x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = -2 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x - 2x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = -1 - x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 - 3a_2, \quad b_2 = 5a_1 - 4a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2, \quad b_4 = 4a_1.$$

$$c_1 = b_1 + b_2 - 5b_3 - 4b_4, \quad c_2 = -b_1 + b_2 + 2b_3 + b_4, \quad c_3 = -5b_1 + 2b_2 + 3b_3 - 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + 2a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = -a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -4a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 - 2a_3, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2 - 5a_3, \quad b_3 = -a_1 + 3a_2 - 2a_3, \quad b_4 = 3a_1 - 4a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 4a_1 - 2a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_2 = 3a_1 - 4a_2 + a_4, \quad b_3 = 3a_1 - a_2 + a_3 + 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(-2) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 47.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad (x-2)^2 + y^2 \leqslant 9 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) + 3f(3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 4x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 1 - 2x + x^2 - 2x^3,$$

$$g(x) = 2 + x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 2x - 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x - 2x^2, \qquad f_3(x) = 4 + x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 5a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -3a_1 - 6a_2, \quad b_4 = 2a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = b_1 + 4b_2 - 2b_3 - 2b_4, \quad c_2 = 4b_1 + b_2 + 3b_3 + b_4, \quad c_3 = -4b_1 + 4b_2 + b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 4a_1 + 2a_2 - 2a_3, \quad b_2 = -a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 2a_1 - 2a_3, \quad b_4 = -a_1 + 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f(-1) = 0\big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\big\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 48.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad xy \leqslant 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(0) + 2f(0) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = -1 - 2x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 1 - x - x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x, \qquad f_2(x) = 1 + x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \quad b_2 = 6a_1 - a_2, \quad b_3 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 - a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 6b_2 - 6b_3 + 2b_4, \quad c_2 = 2b_1 - b_2 - 5b_3 + 2b_4, \quad c_3 = 3b_1 - b_2 + 2b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = 4a_1 + a_2, \quad b_3 = -4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 + 4a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 5a_2 + 3a_3, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_4 = 7a_1 - 4a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4, \quad b_2 = -3a_1 + 4a_2 + 3a_3 + a_4, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + 4x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 49.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2: \quad y \leqslant -x^2 + 2x + 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \quad f(3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-1) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x + x^2 - x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + x^2 - 2x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x - 2x^3,$$
$$g(x) = 1 + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -4 - 2x - 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 4 + 2x + 5x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1 - 4a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = 6a_2, \quad b_4 = a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = -5b_2 + 5b_3 + b_4, \quad c_2 = 4b_1 + 6b_2 + b_3 - 5b_4, \quad c_3 = b_1 + b_2 - 6b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 4a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 5a_1 + 2a_2 + 7a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_3 = -a_1 - a_2 - 2a_3, \quad b_4 = 4a_1 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -4 + 3x + 4x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 50.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x + 5y \leqslant 5 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(4) + 2f(4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -2 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = -3 + x + 2x^3,$$

$$g(x) = -2 - x^2 - 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -3 + x + 4x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 - 6a_2, \quad b_2 = a_1 + 3a_2, \quad b_3 = 2a_1 - 4a_2, \quad b_4 = -4a_1 + 4a_2.$$

$$c_1 = 5b_1 + 3b_2 - 2b_3 + b_4, \quad c_2 = -b_1 + 2b_3 - b_4, \quad c_3 = b_1 + 3b_2 + 3b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1 - 3a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = -3a_1.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -3a_1 + 2a_2 + 5a_3, \quad b_2 = 4a_1 - 4a_3, \quad b_3 = -5a_1 - 4a_2 + a_3, \quad b_4 = -a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + 3a_3 + 4a_4, \quad b_2 = 3a_1 - a_2 + a_3 + a_4, \quad b_3 = -2a_1 + 2a_2 + a_3 - 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f'(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 51.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x + 3y \neq 5 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \wedge \quad f'(3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = -3 + x + 3x^2 + 4x^3, \qquad f_3(x) = -1 + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + x - x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_3(x) = -3 - x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 + 6a_2, \quad b_2 = -6a_1 - 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 + 3b_2 + 3b_3 - 5b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 3b_2 - 2b_3 + 3b_4, \quad c_3 = 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -a_1 - 3a_2, \quad b_4 = 5a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_2 = -2a_1 - 2a_2 - 4a_3, \quad b_3 = a_1 - 3a_2 - 2a_3, \quad b_4 = 2a_1 + a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 3a_2 + a_3, \quad b_2 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 4a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + x - 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - 4x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 52.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x + 2y \geqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + 3x - 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = 1 - x + x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = -1 + 3x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -a_1 - 6a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + 6a_2, \quad b_4 = 2a_1 - 5a_2.$$

$$c_1 = -6b_1 + 3b_2 + 4b_4, \quad c_2 = 3b_1 - 6b_2 + 5b_3 + 4b_4, \quad c_3 = b_1 - 5b_2 + b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -a_1 - 2a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = 4a_1 - 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 3a_1 - 3a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 4a_2 + 2a_3, \quad b_4 = -a_1 + 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4, \quad b_2 = a_1 + a_3 - a_4, \quad b_3 = -a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = -1 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f'(2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 53.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x - 3|y| = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(1) = 0 \quad \wedge \quad f'(-3) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = -2 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^3,$$

$$g(x) = -1 + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = 2 - 2x - 4x^2, \qquad f_3(x) = 4 + 3x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -2a_1 + 4a_2, \quad b_2 = -4a_1, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 - 6b_2 - 5b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 3b_1 + 5b_2 + 2b_4, \quad c_3 = -2b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 4a_2, \quad b_4 = a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_4 = -4a_1 - 3a_2 - a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 3a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 4x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 3 - x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 54.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad xy = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-4) + 2f(-4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 2x + x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = -2x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + 4x - 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x - x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -5a_1 - 4a_2, \quad b_2 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = -6b_1 + 2b_2 - 4b_3 - 2b_4, \quad c_2 = 5b_1 + 5b_2 + 5b_3 + 3b_4, \quad c_3 = 2b_1 + 3b_2 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 - a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 - 3a_2 - 4a_3, \quad b_2 = 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 2a_2 + a_3, \quad b_4 = 2a_1 - a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 - a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 - 4a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_3 = 3a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 - 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 - x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(3) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 55.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leqslant -y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 - x^3, \qquad f_3(x) = x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = -1 - x - 2x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_2(x) = -2x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 3 + x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 - 4a_2, \quad b_2 = a_1 - 3a_2, \quad b_3 = a_1 - 6a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = 5b_1 + 3b_2 - 3b_3 - 4b_4, \quad c_2 = 4b_1 + 4b_2 - b_3 + 2b_4, \quad c_3 = 4b_1 + 4b_2 - 5b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 2a_1 + a_2, \quad b_4 = -4a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_2 = -2a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_3 = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3, \quad b_4 = -3a_1 - 3a_2 - 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_2 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 5 + 2x + 4x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 56.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x + 5y \geqslant 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_0^3 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x - x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 - x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 4 + x - 2x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = -1 + x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2x + x^2, \qquad f_2(x) = -1 + 3x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -a_1 + 5a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 - a_2, \quad b_4 = 2a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 4b_2 + b_3 + 6b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 4b_2 + 5b_3 - 3b_4, \quad c_3 = 2b_1 + 3b_2 - 6b_3 - 4b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = -2a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 4a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_2 = 2a_1 - 3a_2 - 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_4 = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 4a_4, \quad b_2 = 3a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4, \quad b_3 = 3a_1 + 2a_2 + 3a_3 - 3a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = -3 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = -4 + x + 3x^2, \qquad S_2 = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(-3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \operatorname{tr}(X) = 0 \right\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 57.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 2x - y \neq 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-4) + 3f(-4) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 2x - 2x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = -1 + x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 5 - x + 2x^2, \qquad f_2(x) = -3 - x - 2x^2, \qquad f_3(x) = 2 + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 3a_1, \quad b_2 = 4a_1 + 5a_2, \quad b_3 = -a_1 + a_2, \quad b_4 = 5a_1 + 5a_2.$$

$$c_1 = 5b_2 - 5b_3 - b_4, \quad c_2 = 4b_1 - 3b_2 + 4b_3 + b_4, \quad c_3 = 3b_1 - 5b_2 + 2b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -4a_1 - a_2, \quad b_2 = 4a_1 + a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = -a_1.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = 4a_1 - a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 3a_2 + 3a_3, \quad b_4 = a_1 + 3a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = -2a_1 + 4a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 3a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 2x + 5x^2, \qquad f_2(x) = -3 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 58.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \wedge \quad f'(-1) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -3 + 2x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = -2 + 2x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = 3 - x + x^2 - x^3,$$

$$g(x) = -1 + x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 - x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 - x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -a_1 + 6a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 3a_2.$$

$$c_1 = -5b_1 + 2b_2 + 4b_3 - 3b_4, \quad c_2 = -b_1 + 2b_2 + 4b_3 + b_4, \quad c_3 = -5b_2 + 5b_3 + 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -4a_1 + 4a_2, \quad b_3 = 2a_1 + 5a_2, \quad b_4 = -4a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = -3a_1 - a_2 + a_3, \quad b_3 = -2a_1 + 4a_2 + 3a_3, \quad b_4 = 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 - a_2 + a_3 - 3a_4, \quad b_2 = a_1 - 2a_2 + a_3 - 2a_4, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 4a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 - 2x + x^2, \qquad S_2 = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(-1) = 0\big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \mathrm{tr}(X) = 0\big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 59.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x + 2y \neq 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-1) = 0 \quad \wedge \quad f'(-2) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + x - x^2 + 2x^3, \qquad f_2(x) = -3 + 2x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = -3 + x - 2x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 3 - 2x + x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 5 + 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad f_3(x) = 2 + 4x - 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -4a_1 + 5a_2, \quad b_2 = 3a_1 - 4a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 - a_2.$$

$$c_1 = 3b_1 + 6b_2 + 5b_4, \quad c_2 = -3b_1 - 5b_2 + b_3 + 4b_4, \quad c_3 = -b_1 + 2b_2 + 4b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 5a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 3a_1 - 2a_2, \quad b_3 = -a_1 + 2a_2, \quad b_4 = a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -2a_1 - 4a_2 + a_3, \quad b_2 = -4a_1 - 3a_2 + 2a_3, \quad b_3 = -4a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_4 = -2a_1 + 2a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3, \quad b_2 = a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 - x + x^2, \qquad f_2(x) = 5 - 3x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}): \ f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 60.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 3|x| - 5y = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-2) = 0 \quad \wedge \quad f'(1) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 3x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 3x + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 2x + x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 1 - x - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 - 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 5 - 4x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 + 5a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 3a_2, \quad b_3 = a_1 - 5a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

$$c_1 = b_2 - 2b_3 - b_4, \quad c_2 = -5b_1 + 6b_2 + 2b_3 + b_4, \quad c_3 = 3b_1 + 3b_2 + 6b_3 - 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 - a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -3a_1.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -4a_1 + 4a_2, \quad b_2 = a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_4 = -4a_1 + 2a_2 - 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3 - a_4, \quad b_2 = 2a_1 - 3a_2 + a_3 + 3a_4, \quad b_3 = a_1 - a_2 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + x - 3x^2, \qquad f_2(x) = 3 + x - 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(3) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 61.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x - |y| = 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-2) + 3f(-2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3, \qquad f_2(x) = -2x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = 1 + x + x^2.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + 4x + 3x^2, \qquad f_2(x) = -4 - x - 3x^2, \qquad f_3(x) = x + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 2a_1 + 2a_2, \quad b_2 = -2a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 3a_1 - 4a_2.$$

$$c_1 = -4b_1 + 5b_2 - 5b_3 + 3b_4, \quad c_2 = -6b_1 + 2b_2 + b_3 + 3b_4, \quad c_3 = 3b_1 - 3b_2 + 6b_3 + 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2, \quad b_4 = -a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -2a_1 + 2a_3, \quad b_2 = -a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_3 = -3a_1 + 2a_2 + 5a_3, \quad b_4 = -3a_1 + a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 62.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x \geqslant y^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \wedge \quad f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 3x - 4x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 4x - 2x^2 + 3x^3,$$
$$g(x) = 1 + x - 2x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 2x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 5a_1 + a_2, \quad b_2 = -3a_1, \quad b_3 = 4a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 - 3a_2.$$

$$c_1 = 6b_1 + 4b_2 - 2b_3, \quad c_2 = 4b_1 + 4b_2 + 2b_3 - 3b_4, \quad c_3 = 3b_1 + b_2 + 2b_3 - 5b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 - 3a_2, \quad b_4 = 3a_1 - a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 - 4a_2 + 3a_3, \quad b_2 = -4a_1 - 7a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 4a_1 - a_2 + 5a_3, \quad b_4 = 3a_1 - a_2 + 4a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_4, \quad b_3 = -a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 4 + 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 63.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geqslant -x^2 + 1 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f(-1) = 0 \quad \wedge \quad f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 3 + 2x + x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = 1 - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + 4x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + 5x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 3a_2, \quad b_4 = 2a_1 - 5a_2.$$

$$c_1 = -b_1 + 5b_2 + 5b_3 + 3b_4, \quad c_2 = 5b_1 - 5b_2 + 2b_3 - 6b_4, \quad c_3 = 3b_1 + 3b_2 + b_3 - 3b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = -3a_1 - a_2, \quad b_3 = a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 5a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad b_2 = -3a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad b_4 = -a_1 + 4a_2 - 5a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 2a_1 + a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = -2a_1 + a_2 - a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 1 + 3x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 2 - 2x + 5x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 64.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 2x - y \leqslant 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \wedge \quad f'(2) = 0 \}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 4 + 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 3 + x + x^2 + x^3,$$

$$g(x) = 1 + x - x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x + 2x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = 6a_1 + 6a_2, \quad b_2 = 3a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -2a_1 - 4a_2, \quad b_4 = 3a_1 + 3a_2.$$

$$c_1 = b_1 - 4b_2 - 2b_3 - b_4, \quad c_2 = 6b_1 + 4b_2 + 5b_3 - 6b_4, \quad c_3 = 3b_1 - 2b_2 + 6b_3 + 6b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = -a_1 + 4a_2, \quad b_3 = a_1 + 2a_2, \quad b_4 = -2a_1 + 4a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -3a_1 + 3a_3, \quad b_2 = -2a_1 + 2a_2 - 2a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2 - 4a_3, \quad b_4 = a_1 + a_2 - 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - a_4, \quad b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3 - 4a_4, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3 - 4a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 5 + x + 3x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x + x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ f'(-1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 65.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \leqslant x^2 - 4x + 3 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad \int_{-3}^{0} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = -2 + 2x + x^2 - x^3, \qquad f_2(x) = 1 - 2x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3(x) = -2 + x + 3x^2 + x^3,$$

$$g(x) = -x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 - 3x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 1 + 4x + 2x^2, \qquad f_3(x) = 1 + 3x + 2x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = 2a_1 - 3a_2, \quad b_3 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 5a_1 - 3a_2.$$

$$c_1 = -3b_1 - 6b_2 + 2b_3 + 5b_4, \quad c_2 = 5b_1 + b_2 + b_3 - 5b_4, \quad c_3 = 6b_1 + 2b_2 + 2b_3 - b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 2a_1 + 2a_2, \quad b_3 = -2a_1, \quad b_4 = 2a_1 + 3a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 4a_1 - 5a_2 - a_3, \quad b_2 = 5a_1 - 2a_2 + 3a_3, \quad b_3 = -2a_1 + 2a_2, \quad b_4 = 3a_1 - a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 2a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = -3 + x + x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 66.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geqslant -x^2 + 2x \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \quad f'(-3) + 4f(-3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^3, \qquad f_2(x) = 2 + 3x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 2 + 3x + 2x^2 + 3x^3,$$

$$g(x) = -1 - x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2, \qquad f_2(x) = 5 + 2x - 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -6a_1 + 4a_2, \quad b_2 = a_1 + 3a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 - 5a_2.$$

$$c_1 = -b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4, \quad c_2 = 5b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 3b_4, \quad c_3 = 5b_1 - 2b_2 + 6b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = 3a_1 - a_2, \quad b_4 = -2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3, \quad b_3 = -3a_1 - 2a_2 - a_3, \quad b_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 4a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = 4a_2 + 3a_3 + 2a_4, \quad b_3 = -a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 - 2x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 3x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \ f'(3) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(X) = 0 \big\}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 67.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 2y = x^2 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad \int_0^2 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x - x^2 - 2x^3, \qquad f_2(x) = 1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 2x - x^3,$$

$$g(x) = -1 + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 3 + x + 4x^2, \qquad f_2(x) = 4 - 5x - x^2, \qquad f_3(x) = 2 + x + 3x^2.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = -a_1 + 4a_2, \quad b_2 = 3a_1, \quad b_3 = 4a_1 + 2a_2, \quad b_4 = a_1 - a_2.$$

$$c_1 = -3b_1 - b_2 + b_3 + 4b_4, \quad c_2 = 2b_1 - 4b_2 + 3b_3 + 4b_4, \quad c_3 = -3b_1 - 5b_2 + 5b_3 + b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_2 = a_1 + 3a_2, \quad b_3 = -3a_1 + 3a_2, \quad b_4 = a_1 + 2a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad b_2 = -a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_3 = 3a_1 - 3a_3, \quad b_4 = 4a_1 + 5a_2 + a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = 3a_1 + 3a_2 + 2a_3, \quad b_2 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_3 = a_1 - a_3.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 3 + x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + 2x + 3x^2, \qquad S_2 = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 3. Variante 68.

Espacios vectoriales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Muestre que el conjunto S no es subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje el conjunto S en el plano cartesiano, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad 3|x| + 2|y| \leqslant 6 \right\}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Muestre que el conjunto S es un subespacio del espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) + 2f(3) = 0 \right\}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Determine si el polinomio g pertenece al subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3. En el caso de respuesta positiva, escriba el polinomio g como una combinación lineal de los polinomios f_1, f_2, f_3 y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2(x) = 3 - x + x^3, \qquad f_3(x) = 1 + 3x + 2x^2 + 2x^3,$$

$$g(x) = 2 - 2x + x^3.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Determine si la matriz B pertenece al subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A_1, A_2, A_3. En el caso de respuesta positiva, escriba la matriz B como una combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Determine para qué valor del parámetro λ el vector b pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Para este valor del parámetro λ escriba el vector b como una combinación lineal de los vectores a_1, a_2, a_3 y haga la comprobación.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *2 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determine qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 del vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Determine si los polinomios f_1, f_2 son linealmente dependientes o no. En el caso de respuesta positiva, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$f_1(x) = 5 + 2x + x^2, \qquad f_2(x) = 2 + x.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Determine si las matrices A_1, A_2, A_3 son linealmente dependientes o independientes. En el caso si son linealmente dependientes, encuentre una combinación lineal no trivial nula y haga la comprobación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 están dados como combinaciones lineales de a_1, a_2, y los vectores c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de b_1, b_2, b_3, b_4. Represente c_1, c_2, c_3 como combinaciones lineales de los vectores a_1, a_2.

$$b_1 = a_1 - 2a_2, \quad b_2 = a_1 + 6a_2, \quad b_3 = 4a_1 - 2a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

$$c_1 = -2b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 2b_4, \quad c_2 = 6b_1 + 4b_2 - 5b_3 - 4b_4, \quad c_3 = -b_1 + 2b_3 + 2b_4.$$

Ejercicio 11. *1 %.*
Sean a_1, a_2 algunos vectores de un espacio vectorial real. Demuestre de manera explícita que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealmente dependientes, esto es, encuentre una combinación no trivial de los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 que sea igual al vector cero. Escriba bien los razonamientos. Haga la comprobación.

$$b_1 = 5a_1 + 2a_2, \quad b_2 = 3a_1 - 2a_2, \quad b_3 = 3a_1 + a_2, \quad b_4 = 2a_1 + a_2.$$

Ejercicio 12. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para los siguientes vectores a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, b_4.

$$b_1 = -a_1 + 3a_2 + 4a_3, \quad b_2 = -3a_1 + a_2 + 4a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3, \quad b_4 = -a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Ejercicio 13. *1 %.*
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 algunos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial real. Demuestre que los siguientes vectores b_1, b_2, b_3 también son linealmente independientes. Escriba los razonamientos de manera detallada.

$$b_1 = a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4, \quad b_2 = a_1 + 3a_2 + a_3 + 4a_4, \quad b_3 = a_2 + 3a_3 + 2a_4.$$

Ejercicio 14. *2 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ generado por los polinomios f_1 y f_2. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$f_1(x) = 2 + 3x + x^2, \qquad f_2(x) = 1 + x + 2x^2, \qquad S_2 = \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(1) = 0 \big\}.$$

Ejercicio 15. *3 %.*
Sea S_1 el subespacio del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices A y B. Calcule su intersección con el subespacio S_2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \big\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; \mathrm{tr}(X) = 0 \big\}.$$