Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante α.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + 4x_2 \\ -x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 2x - 2)f''(x) + (-x + 1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 - x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 4, & -1, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante β.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 2x - 1)f''(x) + (2x - 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -2, & -5, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 1 AJAS.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - 2x - 1)f''(x) + (-3x + 1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -5x^2 + x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\mathrm{im}(T)$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $P^2 = P$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(P)$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(P)$. Haga las comprobaciones.

$$P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $Q = I - P$. Calcule la matriz $Q_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(Q)$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(Q)$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(P), \ker(P), \mathrm{im}(Q), \ker(Q)$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -5, & -1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = P(v)$ y $w = Q(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(Q)$, $w \in \ker(P)$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(P)$ y de $\ker(P)$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $P_{\mathcal{F}}$ y $Q_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$P_{\mathcal{F}} + Q_{\mathcal{F}} = I, \qquad P_{\mathcal{F}}^2 = P_{\mathcal{F}}, \qquad Q_{\mathcal{F}}^2 = Q_{\mathcal{F}}, \qquad P_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}} = 0, \qquad Q_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 2 BTCF.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 - x - 3)f''(x) + (-2x + 2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 - x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 1, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 3 CSA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ 3x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 - x - 3)f''(x) + (3x + 2)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -4, & -1, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 4 CNKM.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 - x_2 \\ -3x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x - 1)f''(x) + (2x + 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 4x^2 - 3x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -6 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -4, & -4, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 5 CNLE.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_2 + 3 \\ 5x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 3x - 1)f''(x) + (-2x + 2)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -3x^2 + 3x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -1, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 6 DPE.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 2x + 1)f''(x) + (-3x + 2)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + 2x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ -6 & -6 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $P^2 = P$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(P)$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(P)$. Haga las comprobaciones.

$$P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $Q = I - P$. Calcule la matriz $Q_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(Q)$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(Q)$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(P), \ker(P), \operatorname{im}(Q), \ker(Q)$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -2, & -6, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = P(v)$ y $w = Q(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(Q)$, $w \in \ker(P)$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(P)$ y de $\ker(P)$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $P_{\mathcal{F}}$ y $Q_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$P_{\mathcal{F}} + Q_{\mathcal{F}} = I, \qquad P_{\mathcal{F}}^2 = P_{\mathcal{F}}, \qquad Q_{\mathcal{F}}^2 = Q_{\mathcal{F}}, \qquad P_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}} = 0, \qquad Q_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 7 DEER.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + x_2 + 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 2x + 1)f''(x) + (3x - 1)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 8 DLRTH.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 + 3 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 + 3x - 3)f''(x) + (2x - 2)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + 2x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -5, & -3, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 9 DGGI.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 2x + 1)f''(x) + (3x + 2)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -4x^2 + 2x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -4, & -3, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 10 DJRA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 3)f''(x) + (-x - 2)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -4x^2 + 5x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, $\mathsf{P}\mathsf{Q}$ y $\mathsf{Q}\mathsf{P}$ multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 4, & -3, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 11 FMFD.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_2 \\ 5x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x - 2)f''(x) + (2x + 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 3x - 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 4, & 1, & -5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 12 GDLD.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2^2 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + x + 2)f''(x) + (3x - 1)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 - x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -3, & -1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 13 GLMA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_1 - 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 - 3x - 1)f''(x) + (-2x + 2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 - x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 3, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 14 GSLE.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 3x_1 - x_2 + 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x + 1)f''(x) + (3x - 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 4x - 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & 4, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 15 KSJG.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - 3x - 2)f''(x) + (-x + 1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 - 5x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 4, & -5, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 16 LSS.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 - 3x_2^2 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 2x - 1)f''(x) + (-3x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 5x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -3, & 1, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 17 LPS.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 - 5x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x + 3)f''(x) + (-x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 18 MPDD.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 - 4x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 + 3x + 2)f''(x) + (x - 3)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $\coloneqq$ dim(imagen)			
nulidad $\coloneqq$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 19 MHF.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 3x - 2)f''(x) + (x+2)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 4 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & -5 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -3, & 1, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 20 MME.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 - 5x_2^2 \\ -5x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 - x + 2)f''(x) + (3x + 1)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -6, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 21 MRCK.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 2)f''(x) + (-x - 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -3, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 22 PHJL.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 \\ -3x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + x - 2)f''(x) + (2x - 3)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -6, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 23 RAJA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ -2x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - 3x - 1)f''(x) + (-2x + 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -3x^2 + 3x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 24 RCE.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - 5 \\ -4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + x + 3)f''(x) + (-x - 3)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 5x - 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 6 & -6 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & -2, & -1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 25 RDIDJ.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ 1x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 + 3x + 1)f''(x) + (-2x - 1)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + 5x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & -2, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 26 SRGA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -5 \\ -3x_1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 2x - 1)f''(x) + (x-2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 4x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 27 TMMA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + 3x + 1)f''(x) + (2x - 3)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 4x^2 + 2x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & -3, & -1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 28 TELD.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2^2 \\ 2x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x + 1)f''(x) + (-2x + 3)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 6, & -1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 29 UTAV.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -5x_1 - 4x_2 \\ -3x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x - 1)f''(x) + (x+2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 30 VNDI.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 - x - 2)f''(x) + (3x + 2)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -4x^2 + 3x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 6, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 31 VHA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 5x_2 \\ -4x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + x - 2)f''(x) + (3x + 2)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 - 4x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 3, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 32 VMJJ.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 5 \\ x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + 2x - 3)f''(x) + (3x + 1)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -4, & 4, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 33 GMOA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 - 2x - 1)f''(x) + (x+3)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 4x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\mathrm{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -3, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 34 VALA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 - 2 \\ -5x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + x - 2)f''(x) + (-3x + 2)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*

Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*

Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*

Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 4, & 3, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 35 ZPJ.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ -3x_1^2 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 + 2x + 1)f''(x) + (-2x - 3)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -5x^2 + 4x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 6, & -1, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 36 BRMF.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 + x + 3)f''(x) + (-x - 3)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 3x - 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & -1, & 6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 37 RMIA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + x - 1)f''(x) + (2x - 2)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + 2x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 38 MRHA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1^2 - 4x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x + 2)f''(x) + (x-1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 5x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & -1, & -6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 39 AVMA.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 - 2x - 1)f''(x) + (3x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -5x^2 + 2x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -5, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 40 MCCO.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1^2 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 3x - 1)f''(x) + (-2x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -x^2 + 4x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -3, & -1, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 41.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + 4 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - 3x + 1)f''(x) + (2x + 3)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 4x - 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $\mathsf{T}\colon \mathsf{V}\to\mathsf{V}$ una transformación lineal. Dadas la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $\mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $\mathsf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $\mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathsf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}=\mathrm{I}$ y calcule la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$\mathsf{T}_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2\\ -2 & 4 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{bmatrix},\qquad \mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $\mathsf{T}(\mathsf{F}_1)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_2)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_3)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_4)$ y escriba la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F}=(\mathsf{F}_1,\mathsf{F}_2,\mathsf{F}_3,\mathsf{F}_4)$, donde

$$\mathsf{F}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{F}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{F}_3=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{F}_4=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}=\mathrm{I}$ y $\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}=\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $\mathsf{T}\colon V\to W$ dada por su matriz asociada $\mathsf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ -4 & -2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales $\mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{U}$ dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$\mathsf{S}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} -6 & -6 & -2 & -2\\ 3 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathsf{T}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} -4 & -1 & -4\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathsf{U}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -3, & 5, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 42.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 5x_2^2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - x + 3)f''(x) + (-3x - 2)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -x^2 + 5x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 6, & -1, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 43.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x + 2)f''(x) + (3x + 1)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + 5x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, $\mathsf{P}\mathsf{Q}$ y $\mathsf{Q}\mathsf{P}$ multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -4, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 44.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -5x_1^2 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 + 3x - 1)f''(x) + (2x - 3)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -3x^2 + 2x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -5, & -4, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 45.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - x - 2)f''(x) + (-3x + 3)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 - x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & -2, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 46.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1^2 + 4x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 1)f''(x) + (-3x - 2)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 4x^2 + x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 3, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 47.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2^2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 2)f''(x) + (-3x + 1)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + 5x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -5, & -3, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 48.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4x_2^2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x + 1)f''(x) + (-2x + 2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 4x^2 - 4x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\mathrm{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \mathrm{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathrm{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 49.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 \\ -3x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - x + 2)f''(x) + (x+3)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 4x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $\coloneqq$ dim(imagen)			
nulidad $\coloneqq$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 3, & 3, & 4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 50.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 5x_1 - 5x_2 \\ -3x_1^2 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 2)f''(x) + (x - 1)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -3x^2 + 2x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $\mathsf{T}\colon \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ una transformación lineal. Dadas la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $\mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $\mathsf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $\mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\mathsf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \mathrm{I}$ y calcule la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$\mathsf{T}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $\mathsf{T}(\mathsf{F}_1)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_2)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_3)$, $\mathsf{T}(\mathsf{F}_4)$ y escriba la matriz $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3, \mathsf{F}_4)$, donde

$$\mathsf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{F}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \mathrm{I}$ y $\mathsf{P}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}\mathsf{P}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $\mathsf{T}\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $\mathsf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\mathrm{im}(\mathsf{T})$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales $\mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{U}$ dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$\mathsf{S}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{T}_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{U}_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -5, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 51.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + 2x - 3)f''(x) + (x - 1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 4x^2 - 4x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -3, & 1, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 52.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -3x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (x^2 - x - 2)f''(x) + (3x + 2)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -3x^2 + 4x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -4, & 5, & -2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 53.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 5x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 2x + 2)f''(x) + (3x + 1)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 5x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \end{bmatrix}^{\top}$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 54.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 2x - 2)f''(x) + (3x + 1)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -4x^2 + 4x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -5 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 55.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 - 5x_2 \\ 5x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 + 3x - 1)f''(x) + (x+2)f'(x) - 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 56.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_2 \\ -5x_1^2 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 + 2x - 1)f''(x) + (-3x - 2)f'(x) + 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 4x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & -1, & -6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 57.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 - 2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 2x + 2)f''(x) + (x - 3)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 - 4x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 4, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 58.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 - 4x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x + 1)f''(x) + (2x - 2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -6, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 59.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 + 5x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 + 2x + 1)f''(x) + (3x - 2)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + x - 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & -3, & -3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 60.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 + 3x + 2)f''(x) + (x - 1)f'(x) - 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & -4, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 61.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (2x^2 - 3x + 1)f''(x) + (-2x + 3)f'(x) - 1f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}}g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -2x^2 + x + 3.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $\coloneqq$ dim(imagen)			
nulidad $\coloneqq$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 5, & -4, & 2 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 62.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 3x + 2)f''(x) + (-2x + 1)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 2x^2 + 5x - 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 & -4 \\ -5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 63.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 - x_2^2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 + 3x - 2)f''(x) + (x - 3)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -x^2 + 5x + 1.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} -1, & 1, & -5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 64.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -5x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 - 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-2x^2 - x + 3)f''(x) + (-3x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -x^2 + 2x + 5.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -4 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 65.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 5x_1^2 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 2x - 3)f''(x) + (x+2)f'(x) + 3f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = 5x^2 + 3x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -5, & 1 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 66.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 - 5 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (3x^2 - 3x + 1)f''(x) + (-x - 2)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_\mathcal{E}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_\mathcal{E}$ y calcule el producto $T_\mathcal{E} g_\mathcal{E}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = x^2 - 5x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -6 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 67.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-x^2 - 2x + 3)f''(x) + (-3x + 1)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango := dim(imagen)			
nulidad := dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 1, & -2, & 3 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 5. Variante 68.

Transformaciones lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la siguiente fórmula no es transformación lineal. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2^2 \\ 5x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$(Tf)(x) = (-3x^2 - 2x - 1)f''(x) + (x+3)f'(x) + 2f(x).$$

Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$. Para comprobación calcule Tg aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(Tg)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} g_{\mathcal{E}}$.

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$
$$g(x) = -5x^2 + x + 2.$$

Ejercicio 3. *2 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcule la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, compruebe la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcule la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *2 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Calcule las matrices $T(F_1)$, $T(F_2)$, $T(F_3)$, $T(F_4)$ y escriba la matriz $T_{\mathcal{F}}$ asociada a la transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, donde

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba las matrices de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$, compruebe que $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$ y $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}$.

Ejercicio 6. *1 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %; se baja 0.25 % por cada error en la tabla.*
Se consideran tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango $:=$ dim(imagen)			
nulidad $:=$ dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Ejercicio 8. *1 %.*
Sea T la transformación lineal del Ejercicio 3. Construya una base de $\ker(\mathsf{T})$ y una base de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 9. *2 %.*
Sea $\mathsf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por su matriz asociada con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$. Verifique que $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Construya una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(\mathsf{P})$. Haga las comprobaciones.

$$\mathsf{P}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Seguimos trabajando con la transformación lineal P del ejercicio anterior. Sea $\mathsf{Q} = \mathrm{I} - \mathsf{P}$. Calcule la matriz $\mathsf{Q}_{\mathcal{E}}$. Calcule Q^2, PQ y QP multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

Ejercicio 11. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{Q})$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(\mathsf{Q})$. Muestre que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y vice versa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y vice versa. ¿Qué significa esto en términos de los subespacios $\operatorname{im}(\mathsf{P}), \ker(\mathsf{P}), \operatorname{im}(\mathsf{Q}), \ker(\mathsf{Q})$?.

Ejercicio 12. *1 %.*
Sea $v = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 5 \end{bmatrix}^\top$. Calcule los vectores $u = \mathsf{P}(v)$ y $w = \mathsf{Q}(v)$. Con comprobaciones directas muestre que $u + w = v$, $u \in \ker(\mathsf{Q})$, $w \in \ker(\mathsf{P})$.

Ejercicio 13. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{F}$ al sistema de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(\mathsf{P})$ y de $\ker(\mathsf{P})$. Escriba la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $\mathsf{U}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcule su inversa y haga la comprobación.

Ejercicio 14. *1 %.*
Calcule las matrices $\mathsf{P}_{\mathcal{F}}$ y $\mathsf{Q}_{\mathcal{F}}$ asociadas a las transformaciones lineales P y Q con respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior. Verifique que

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}} + \mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = \mathrm{I}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{P}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}^2 = \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}, \qquad \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{F}} = 0, \qquad \mathsf{Q}_{\mathcal{F}}\mathsf{P}_{\mathcal{F}} = 0.$$