Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante α.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1^2 + x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(1) - 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + 4t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_2 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante β.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 4x_1 - x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & -3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(-1) - 3P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_{\mathcal{E}}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + 2x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= -6x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 6x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 1 AJAS.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1^2 + x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 3, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) - P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 4x_2 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 2 BTCF.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 3, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(-1) + P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + t + 4t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -5, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 3 CSA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1^2 - 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) - 3P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 2t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -4x_1 + x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 4 CNKM.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1^2 - 4x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - 3x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(-2) - 3P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 - t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, \\
\varphi_2(x) &= 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4, \\
\varphi_3(x) &= 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 5 CNLE.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1x_2 - 4x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -4x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(1) - 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_2 - 4x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 6 DPE.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1x_2 - 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 - x_2 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) + P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + 2t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 - 3x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - x_2 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 7 DEER.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 + 3x_2 + 3.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 1, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) + P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 - t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 - 2x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= -3x_2 + 6x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 8 DLRTH.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1x_2 + x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 3x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & -2, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-3) + 4P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 2, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 + x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -x_1 - 3x_2 + x_3, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 9 DGGI.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -4x_1 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) + 2P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 2t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4, \\
\varphi_2(x) &= -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4, \\
\varphi_3(x) &= x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 10 DJRA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -4x_1 + 4x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 + x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & -2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) - P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \\
\varphi_2(x) &= 2x_1 + x_2 + 3x_4, \\
\varphi_3(x) &= -4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 11 FMFD.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1x_2 + 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & -1, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(-1) + P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -5, & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -4x_1 - x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 6x_2 + x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 12 GDLD.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1 - 2x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 + x_2 - 4x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) + P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 + 3t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 + x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 - 5x_2 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 13 GLMA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 4x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 4, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) + P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_{\mathcal{E}}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 14 GSLE.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 - x_2 + 3.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 - x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) + P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 4 + t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 + 3x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 15 KSJG.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1 - x_2 - 2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 2, & -3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(2) + 2P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_{\mathcal{E}}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + 2x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -x_1 - 3x_3 - 2x_4, \\
\varphi_2(x) &= 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4, \\
\varphi_3(x) &= 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 16 LSS.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1^2 - 4x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(-1) - P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -1, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 - 3x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 17 LPS.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -4, & 2, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(1) + 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 - t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - x_2 - 4x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 18 MPDD.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 - 3x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 2, & -3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(-1) + P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 + t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 + 3x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 19 MHF.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & -1, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) - P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 + t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 20 MME.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1^2 - 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -3P(1) + P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 2t - 4t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 21 MRCK.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 + 2x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 1, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(2) + 2P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - 4x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 22 PHJL.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1 + 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -4x_1 + x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 4P(-1) + 3P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 - 3t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 23 RAJA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1 + x_1 x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 4x_1 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -4, & -1, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 3P(1) - 2P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 - 3t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -4x_1 + x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 24 RCE.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 + x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 - 2x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -3P(-1) - 2P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -4 + 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -2x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 25 RDIDJ.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1x_2 - 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(1) - 3P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 3t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 2, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 + 3x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 26 SRGA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1 + 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & 3, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -4P(1) + 3P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + 4x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 - 4x_2 - 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 27 TMMA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1x_2 - x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -3, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -3P(1) + 2P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 - t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 28 TELD.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1^2 - x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(2) + 3P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 + 3t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -5, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - 4x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 29 UTAV.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 4.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(2) - 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -4x_1 + x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 6x_2 - x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 30 VNDI.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1x_2 + 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 + 3x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 1, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) + P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 3t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -1, & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= -4x_1 + 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 31 VHA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 + 3x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 4x_2 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(1) - 3P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 4 - t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_2 - 2x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 32 VMJJ.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 + 3x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 2x_2 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 1, & -4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(1) - 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - x_2 + 4x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_2 + 5x_3 + 5x_4, \\ \varphi_3(x) &= -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 33 GMOA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 x_2 - 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 4, & -1, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(1) - 3P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + 2t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - 4x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 - 3x_2 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 34 VALA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1 + x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 - 3x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 3, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(2) - P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 3x_2 - x_3, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 35 ZPJ.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 + 2x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 2x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) - P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 3t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - 3x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= 5x_1 - x_2 + 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 36 BRMF.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 + x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & 1, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(1) + 3P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 - 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_2 + 4x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 37 RMIA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 - 3x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 1, & 4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) + P'(-4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 4t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + x_2 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 38 MRHA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 - x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) + P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -4 + 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - 3x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 39 AVMA.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1 - 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -4x_1 + x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & -2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(1) + 2P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 + 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 2, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 3x_2 - 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 40 MCCO.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1 - 4x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 4x_1 - x_2 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 1, & -4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(-2) + 3P'(-4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 - 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + 4x_2 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 41.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1 - 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_2 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 1, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) - P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 - 3x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_3 + 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 42.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 + 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 4x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -1, & 4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-3) + 2P'(-4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 + x_2 - 4x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 43.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1 - x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 2, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(2) + 2P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 4t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 - x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4, \\
\varphi_2(x) &= x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4, \\
\varphi_3(x) &= -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 44.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1^2 - 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 1, & -4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -4P(-1) - 3P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 2t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -5, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4, \\
\varphi_2(x) &= 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4, \\
\varphi_3(x) &= 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 45.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1 + 4x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 4x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & -2, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(-1) + P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -4 - 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 46.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 x_2 - 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -3P(1) + 2P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -1, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 - x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 2x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 47.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 - x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) - 2P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 + 3t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 48.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 + 2x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 - x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) - P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 4 + 2t - t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 49.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1^2 + 2x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-3) + 4P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + 4t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -4x_1 + x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4, \\ \varphi_3(x) &= -4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 50.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1 + 4x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_2 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & -2, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) - P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 - 2x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 51.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1 - 2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-2) + P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + 4t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -x_1 + x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -2x_1 - x_2 - 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 52.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1 - 3x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 - 2x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -3, & -1, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-2) + P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 + 2t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - x_2 - 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$\mathrm{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 53.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 - 4x_1x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 + 4x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(1) + 2P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -1, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - 3x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 54.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1^2 - x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -3, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) + 3P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -1 - 2t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 4, & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= -6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4, \\ \varphi_3(x) &= 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 55.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_2^2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 2, & -1, & -2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(2) - P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 + 3t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 1, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 56.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1 + x_1 x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + x_2 + 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 3, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) - P'(4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + 2t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 3x_2 + 4x_3 - 3x_4, \\
\varphi_2(x) &= 4x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, \\
\varphi_3(x) &= -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 57.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1 - 3x_2 + 4.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & 2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) - 3P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= x_1 + 3x_2 - 5x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 58.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 2x_1x_2 - 4x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 + x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -4, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-1) - 3P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t - 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= -x_1 + 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 59.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1 + x_2 - 5.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 - 2x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -2, & 3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = P(-2) + 3P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - 3t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 5, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4, \\ \varphi_3(x) &= -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 60.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = x_1 x_2 + 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -3x_1 + x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -4 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) - 2P'(1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -2 + 2t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X \right), \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= 4x_2 + 5x_3 + 7x_4, \\ \varphi_3(x) &= -4x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 61.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -x_1x_2 + 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -3 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 3P(1) - 2P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 2 - t - 4t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -5, & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4, \\
\varphi_2(x) &= 2x_1 - 4x_2 + 3x_3, \\
\varphi_3(x) &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 62.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 + 3x_2 + 4.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -3, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(1) + P'(3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 4 - t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4, \\ \varphi_2(x) &= -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 63.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -4x_1^2 + x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 2, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) - P'(-2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 + 2t + 4t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4, \\ \varphi_3(x) &= -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 64.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 - x_2 - 2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(1) + P'(-4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -3, & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -7x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4, \\ \varphi_2(x) &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4, \\ \varphi_3(x) &= 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 65.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -4, & -2, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(2) - 2P'(-1).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 - 3t + t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4, \\
\varphi_2(x) &= -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4, \\
\varphi_3(x) &= -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 66.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -3x_1 - x_2 - 5.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 3x_1 - x_2 - 3x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -1, & 3, & 2 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(-1) + P'(-4).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 3 + 3t - 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4, \\ \varphi_2(x) &= x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 67.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 3.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = x_1 - 4x_2 + x_3.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -2, & -3, & 1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 3P(-1) + 2P'(-3).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = -3 + 3t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 3, & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4, \\
\varphi_2(x) &= -4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \\
\varphi_3(x) &= -x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4.
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 6. Variante 68.

Funcionales lineales.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula no es lineal. Para hacerlo, indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

$$f(x) = 4x_1x_2 - x_2.$$

Ejercicio 2. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = -2x_1 + x_2.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(y)$, donde $y = \begin{bmatrix} -4, & 2, & -1 \end{bmatrix}^\top$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -P(-1) + 2P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 + 3t + 2t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Ejercicio 4. *2 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -2, & -3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y haga la comprobación con la siguiente matriz Y.

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X\right), \qquad Y = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = -2x_1 + x_2 - 3x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Ejercicio 7. *1 %.*
Construya una base del anulador de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y haga la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 7x_1 + 3x_3 - 5x_4, \\ \varphi_2(x) &= 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4, \\ \varphi_3(x) &= 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. *1 %.*
Sea Ψ la respuesta del ejercicio anterior. Calcule una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y haga la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Ejercicio 10. *1 %.*
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de vectores de los dos ejercicios anteriores. Escriba cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.