Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante α.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 84, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 101,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 8, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 49, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 21.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

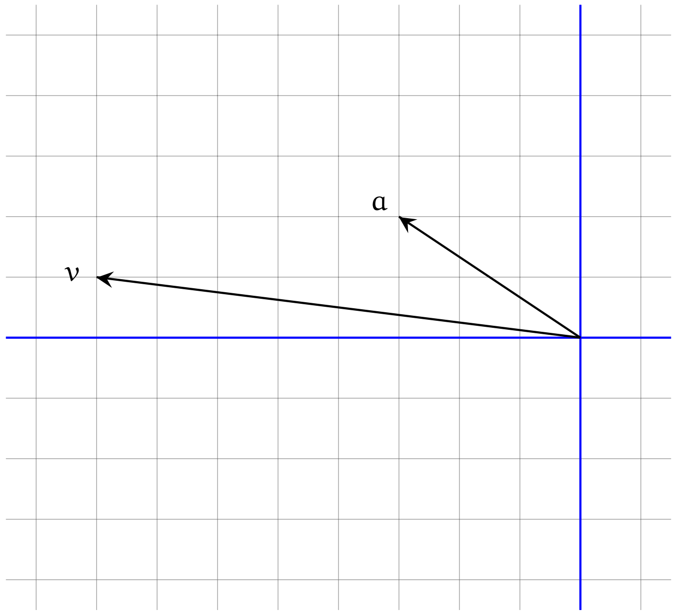
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ 20 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ 13 \\ 9 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

donde $\quad I_p := \int_0^1 x^p\ dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante β.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 5, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 38,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 38.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

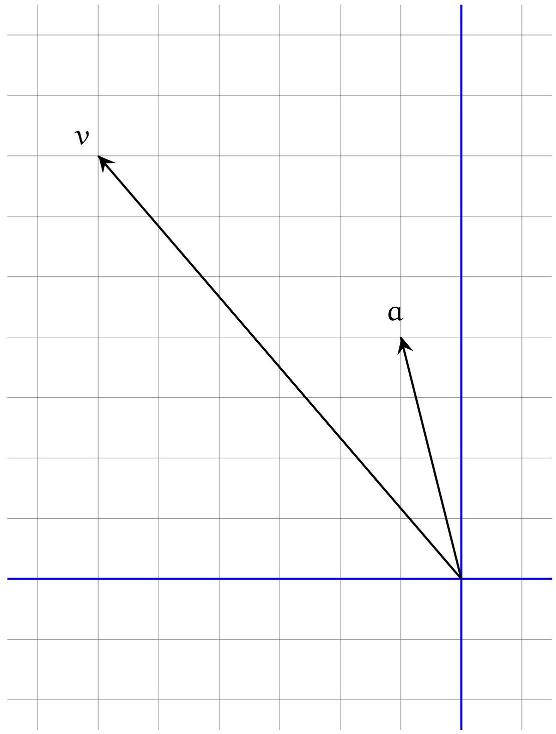
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 14 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{63}$

donde $\quad I_p := \int_0^1 x^p\,(1 - x^2)\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 1 AJAS.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 24, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 69,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 36, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 33, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 29.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

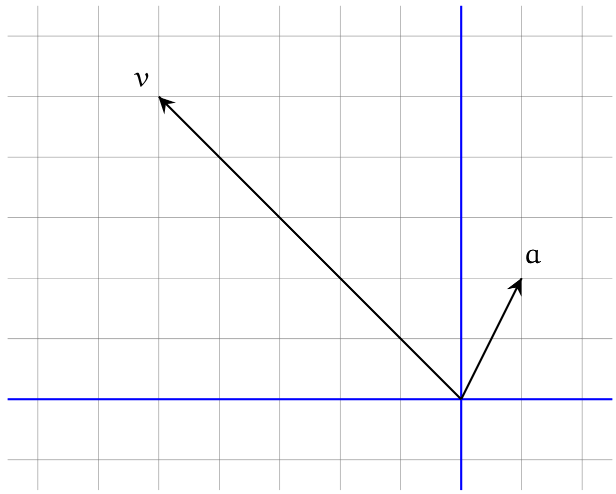
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Álgebra III. Tarea 1. Variante 2 PPAA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 38, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 21, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 17,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 22, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 17.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

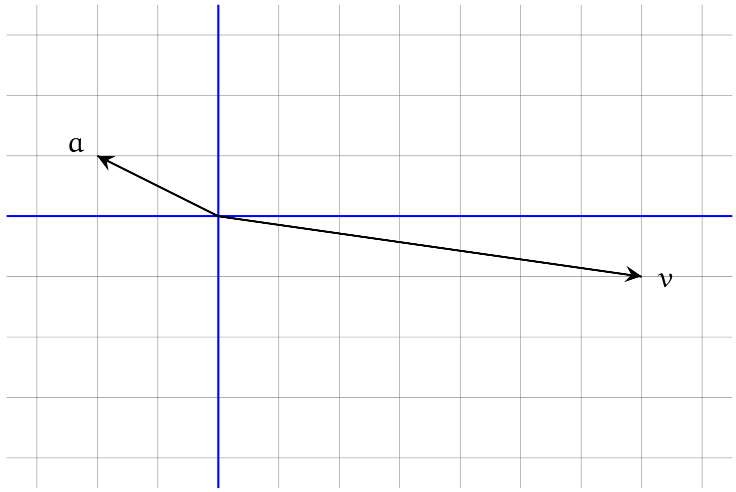
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -23 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 19 \\ 7 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 3 TGC.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 5,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 42, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 101.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

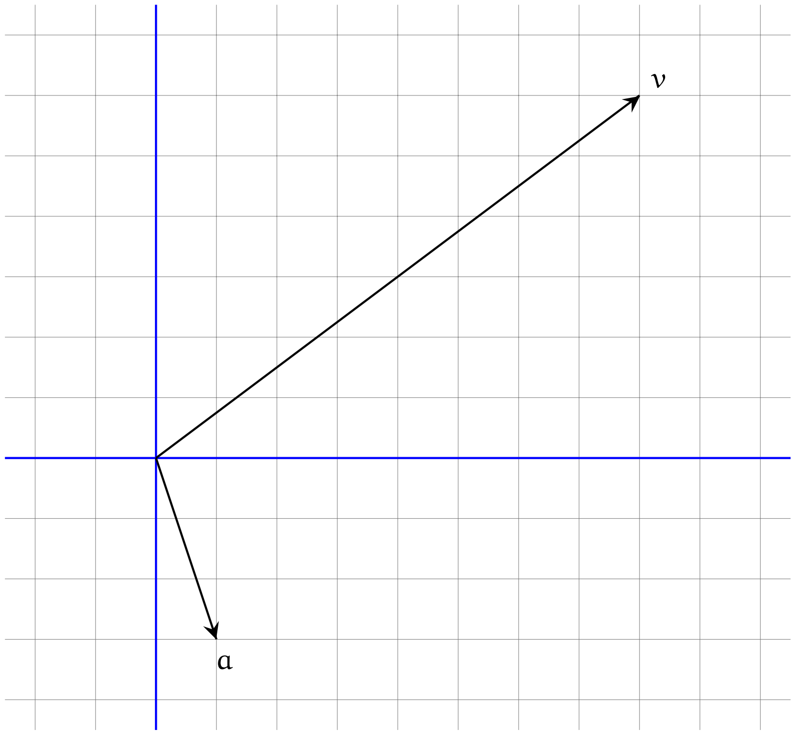
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -8 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 19 \\ 4 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 4 CSA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 50, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 77, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 27,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 62, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 83.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

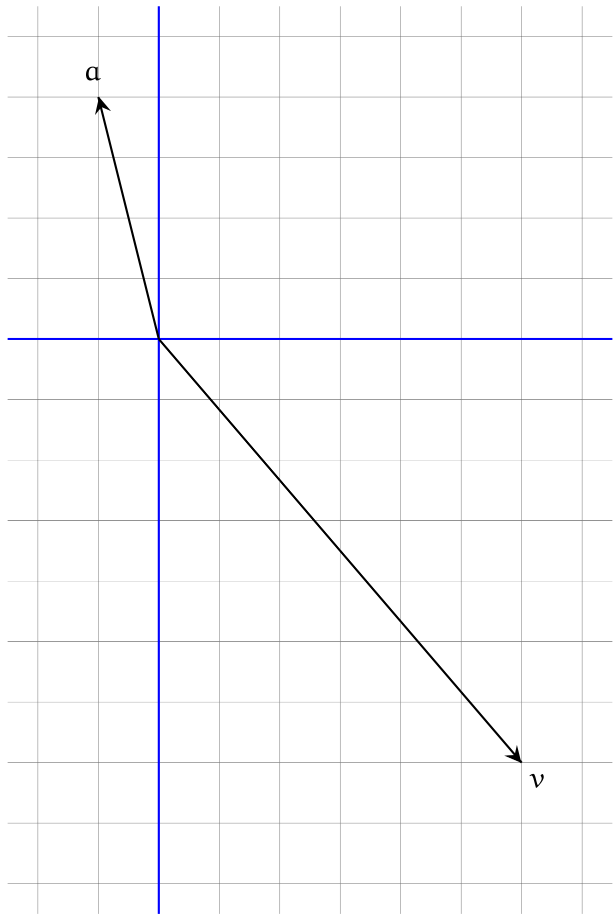
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ -11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\quad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 5 BMSD.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 17, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 26, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 61,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 85, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 34, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 13.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

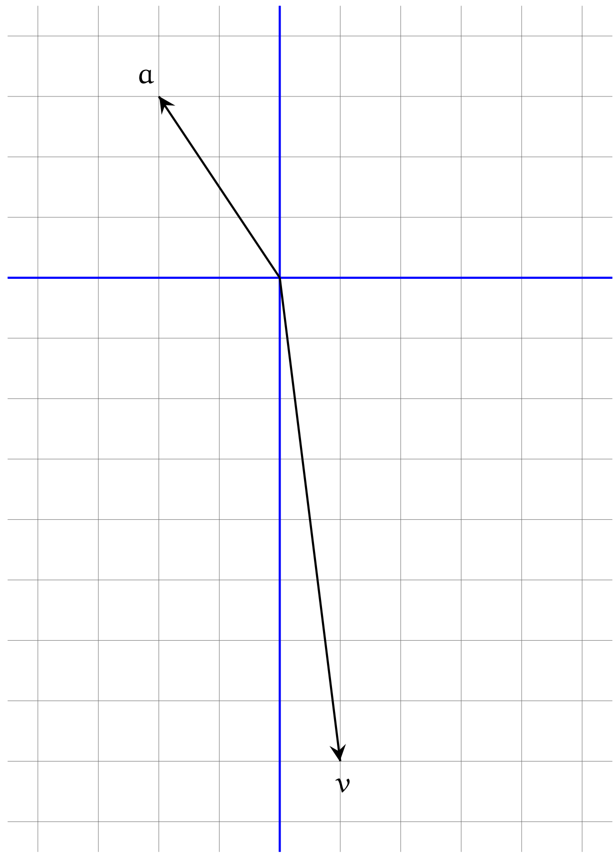
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\quad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 6 DEER.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 6, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 20, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 58,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 102, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 44, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 26.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

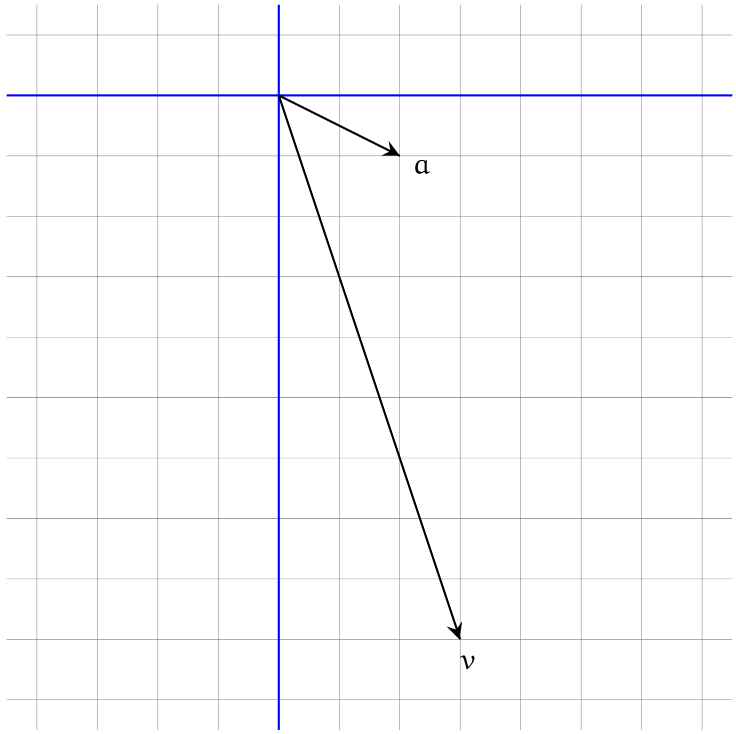
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ -11 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, (1 - x^2) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $\quad I_p := \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p \, (1 - x^2) \, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Álgebra III. Tarea 1. Variante 7 DGGI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 18, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 53, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 3,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 54, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 83.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

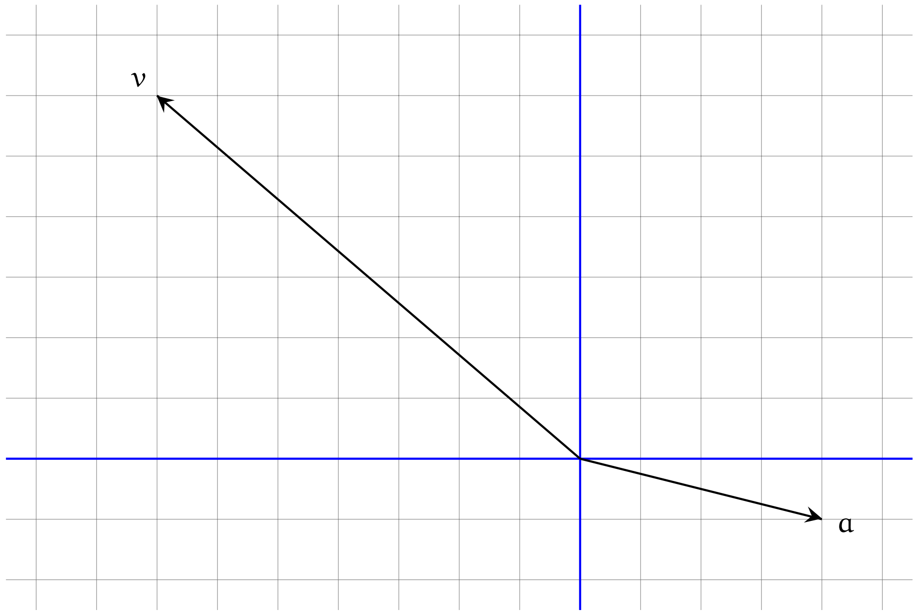
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 16 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 8 LEE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 20, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 80, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 24,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 88, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 4, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 68.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

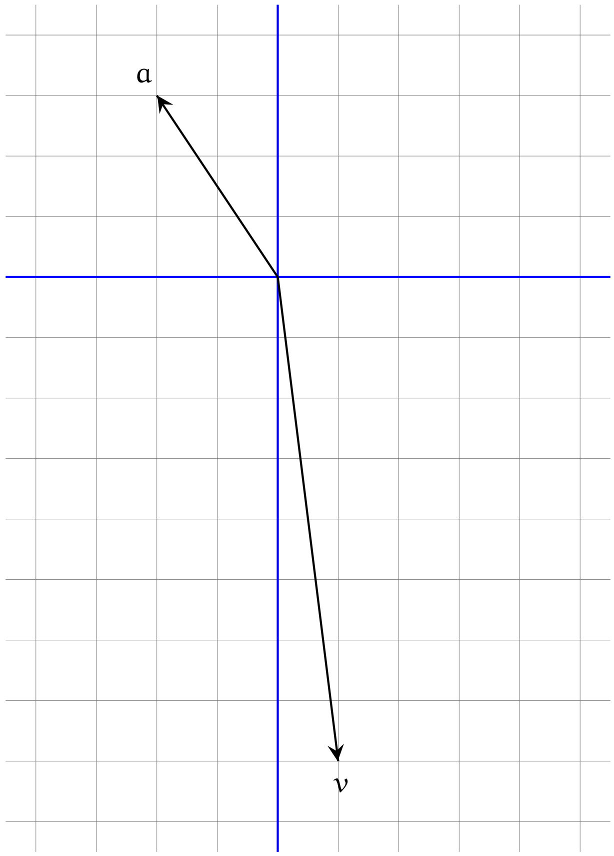
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -6 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 9 GDLD.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 34, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 49,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 1.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

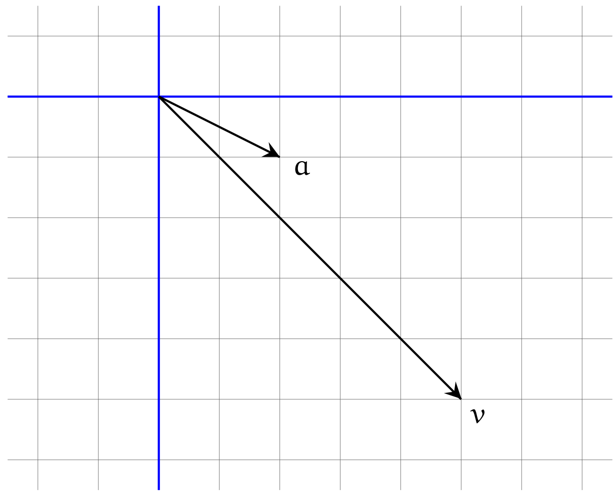
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -15 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 10 TLLB.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 17, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 35, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 14,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 11, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 66.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

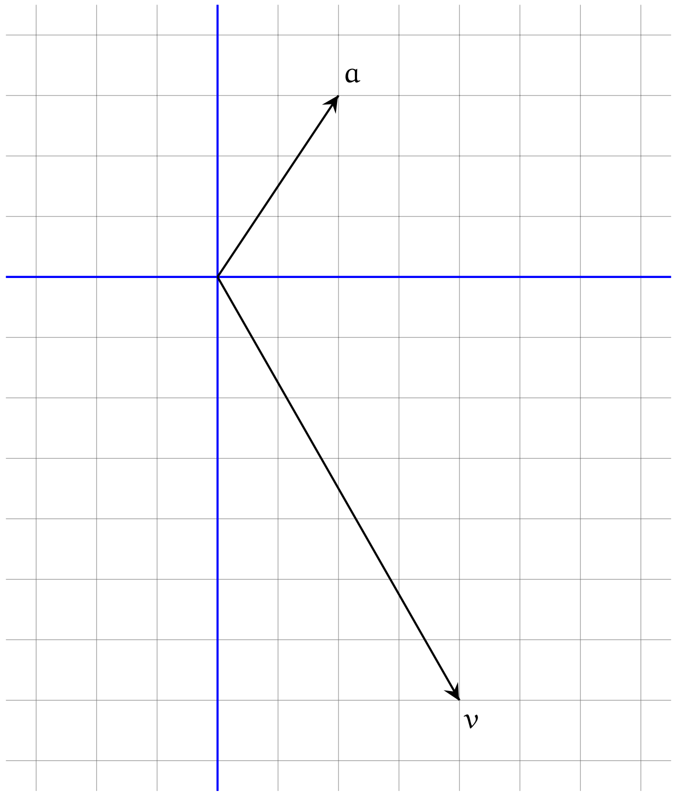
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \\ -15 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\qquad I_p \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 11 GSLE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 50, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 25,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 46, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 45, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 77.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

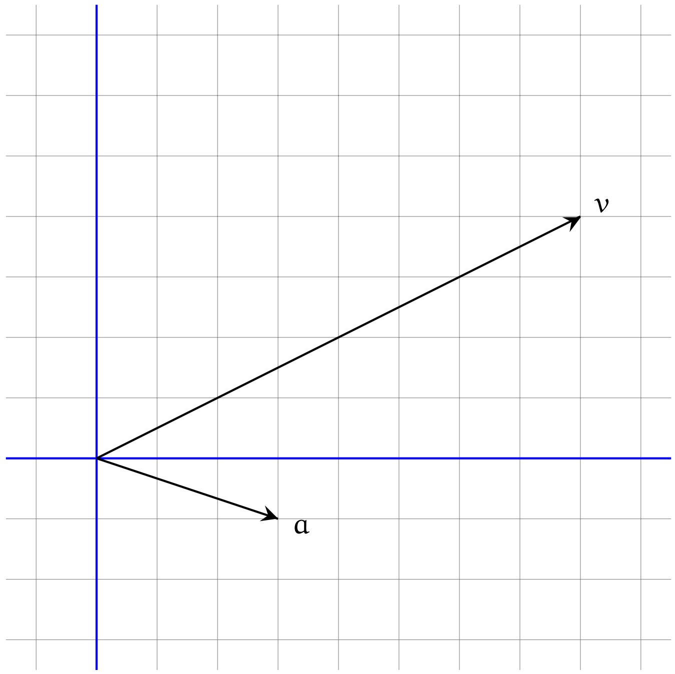
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -15 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $$I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 12 TRI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 19, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 26, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 101,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 51, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 62, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 13.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

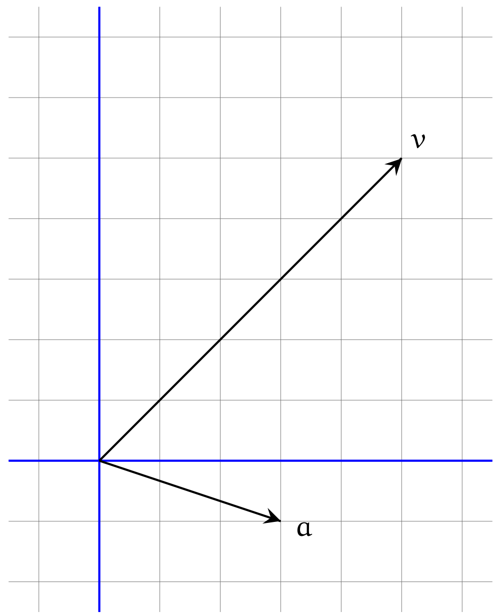
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ 8 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,(1 - x^2)\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 13 LSS.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 10, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 21, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 65,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 74, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 53, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 41.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

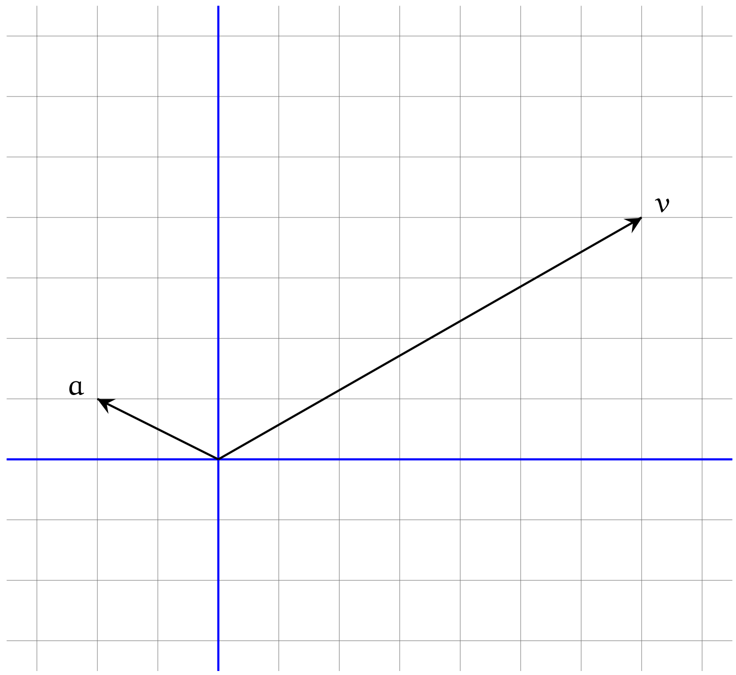
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -18 \\ -17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ -22 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 14 RHPA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 49, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 1, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 34,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 46.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

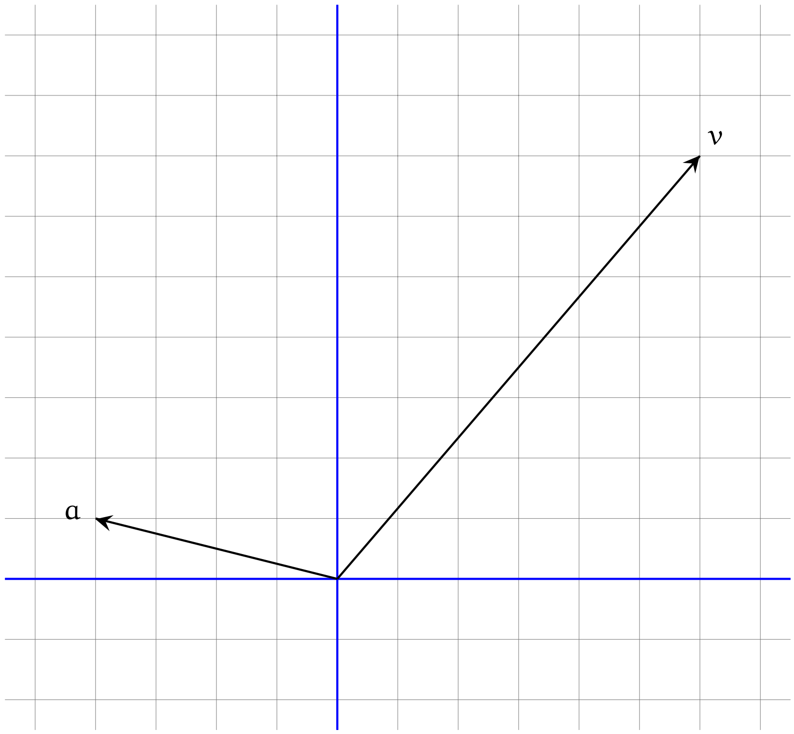
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -14 \\ -16 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $\quad I_p := \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 15 MME.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 110, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 73, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 81,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 5, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 17.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

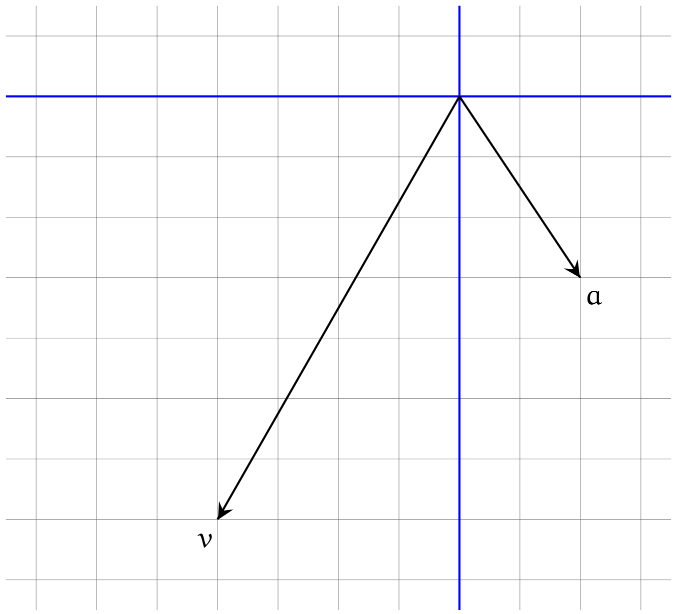
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ -19 \\ 1 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $\quad I_p := \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 16 MRCK.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 26, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 30, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 10,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 30, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 14, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 82.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

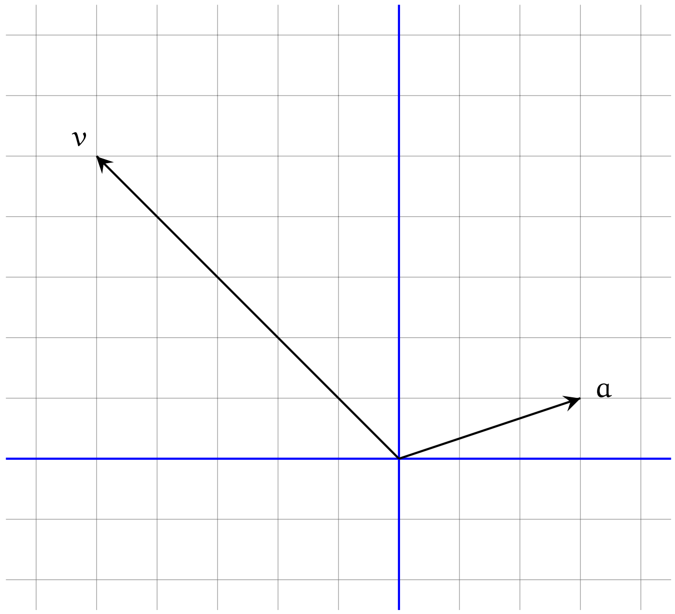
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -7 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\qquad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 17 RAJA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 13, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 34, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 53,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 53, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 46, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 49.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

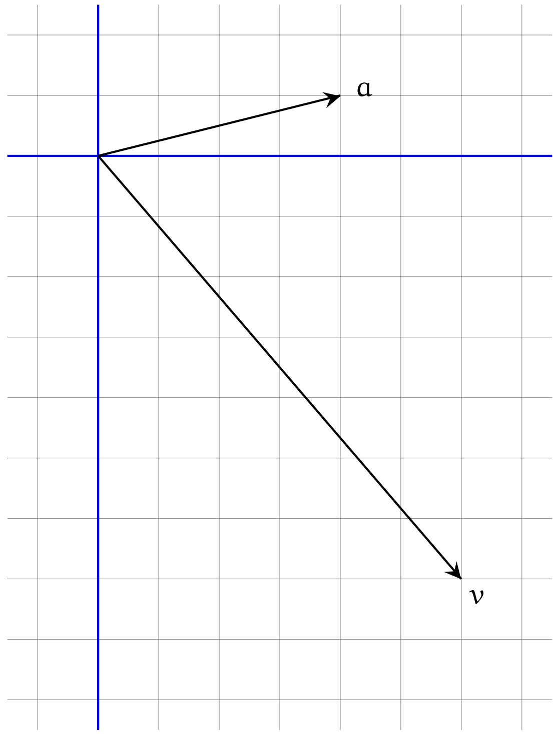
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ 5 \\ 7 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\quad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 18 RDIDJ.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 78, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 29,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 10, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 49, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 45.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

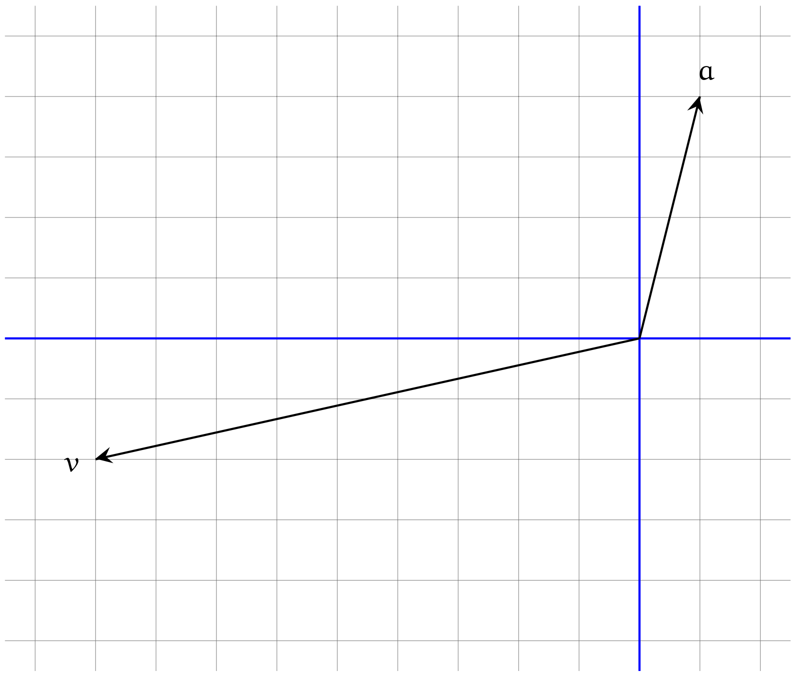
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -22 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, (1 - x^2) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $$I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p \, (1 - x^2) \, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 19 ERE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 30, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 9,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 38, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 69.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

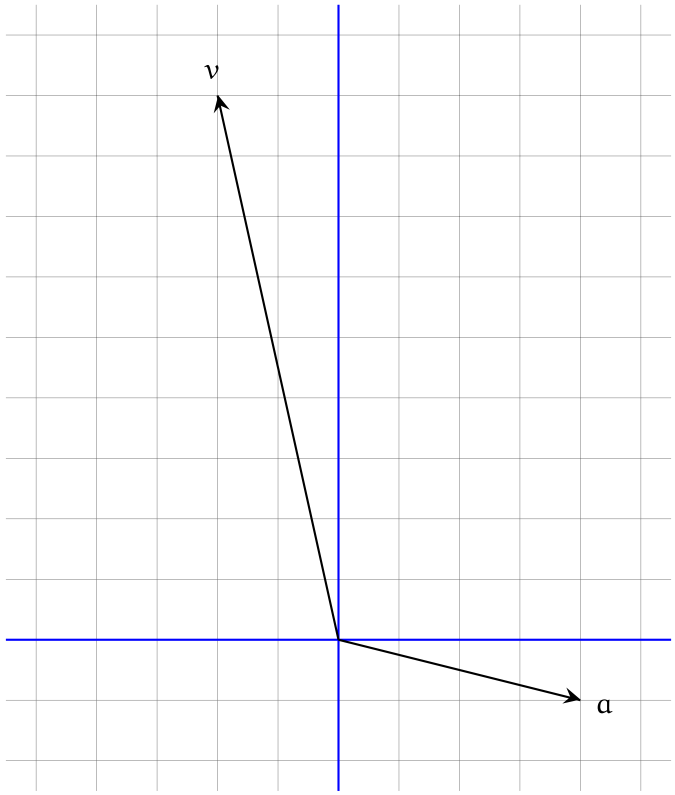
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ -15 \\ -1 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -18 \\ 0 \\ -21 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 20 UTAV.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 4, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 57,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 56, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 33, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 17.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -11 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

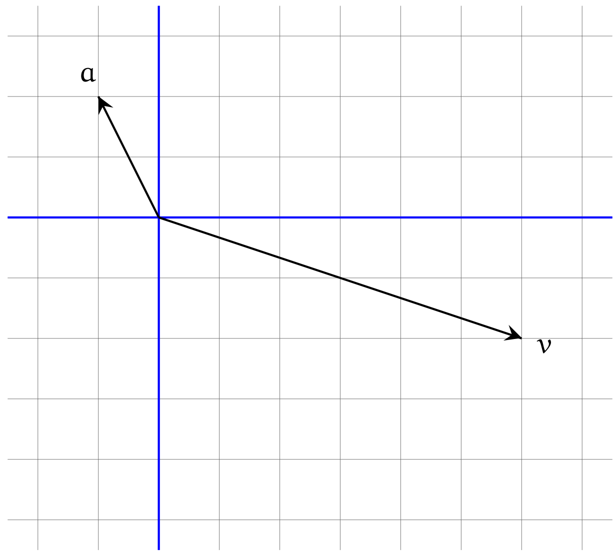
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -11 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 21 VNDI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 24, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 33, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 29,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 56, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 53, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 1.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

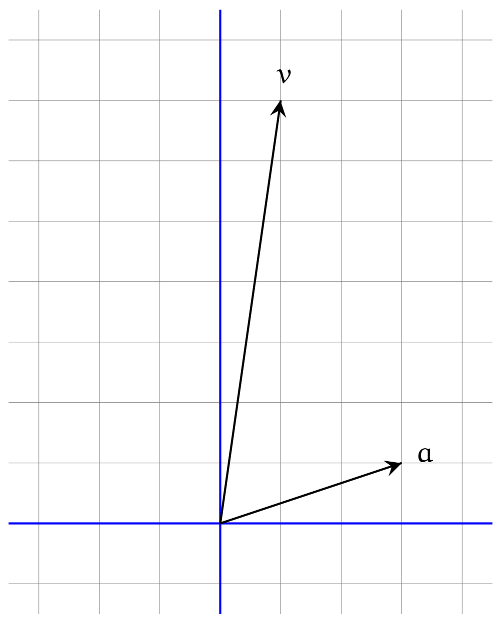
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 22 VHA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 89, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 14,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 17, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 89, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 110.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

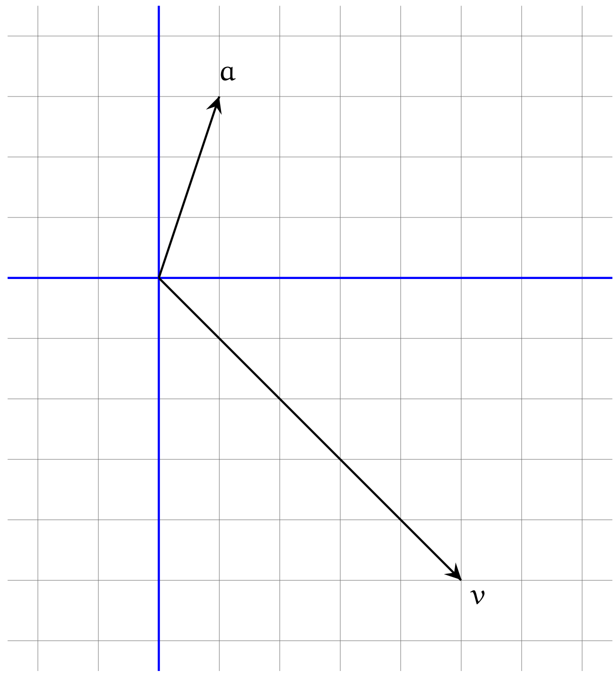
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $I_p \coloneqq \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 23 VMJJ.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 33, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 6, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 25,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 61.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

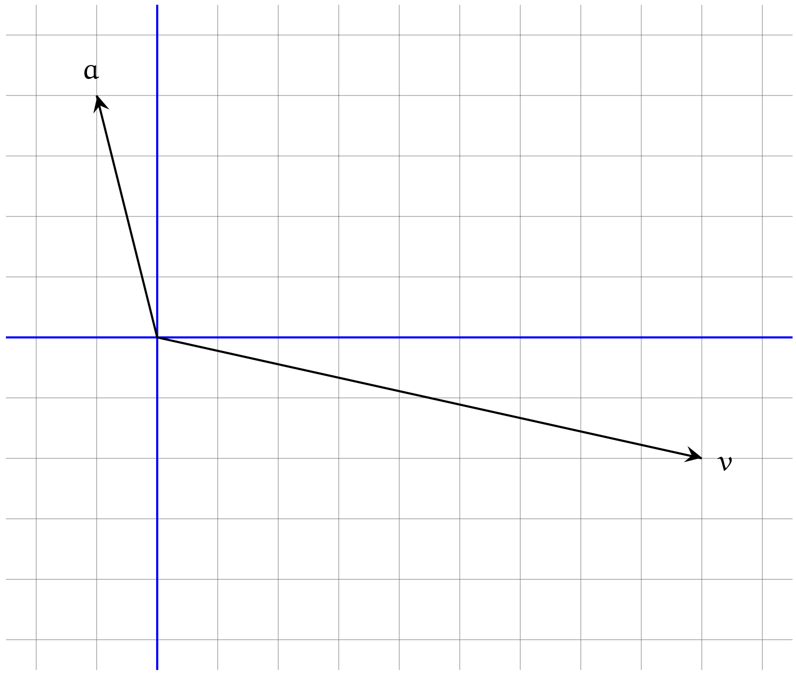
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 22 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -14 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $$I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 24 ZPJ.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 26, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 56,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 74, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 8.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

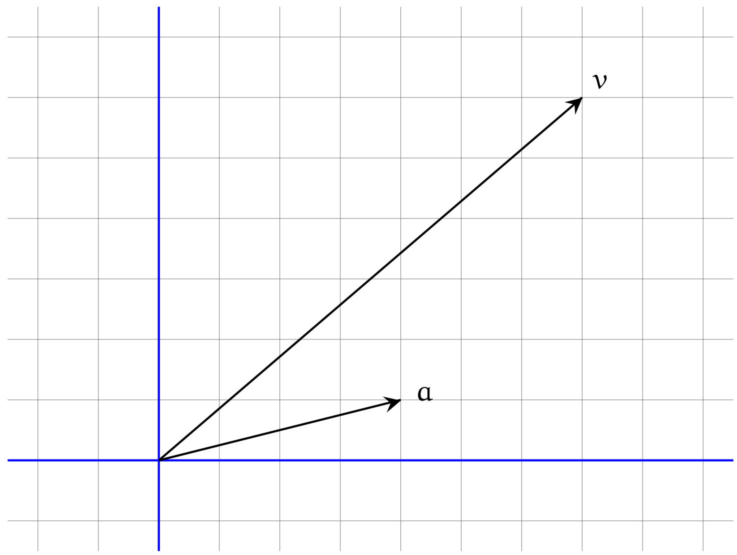
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ -15 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -24 \\ -23 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,(1 - x^2)\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 25 VOA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 17, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 26, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 11,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 53, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 14, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 27.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

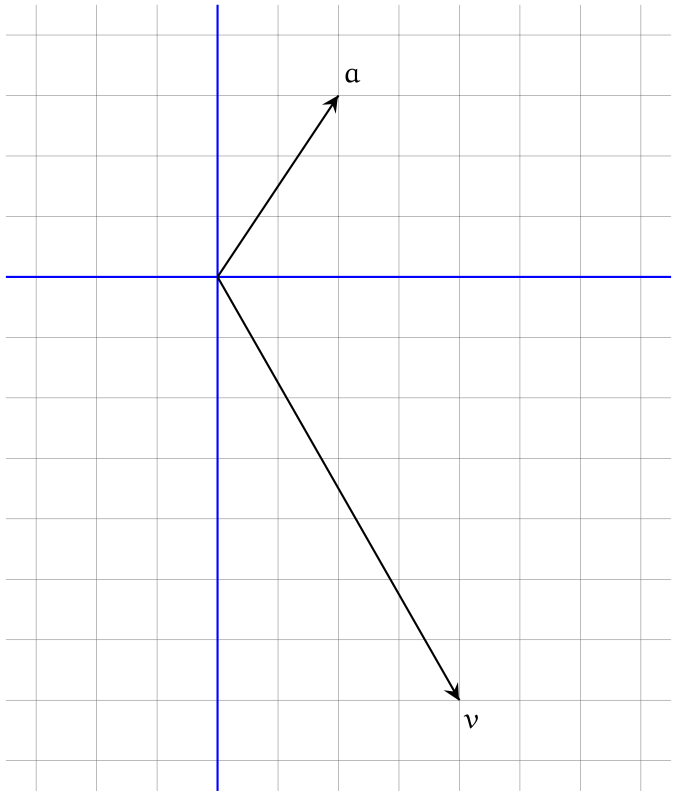
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ -20 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 26 BFO.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 19, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 44, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 11,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 51, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 8, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 27.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

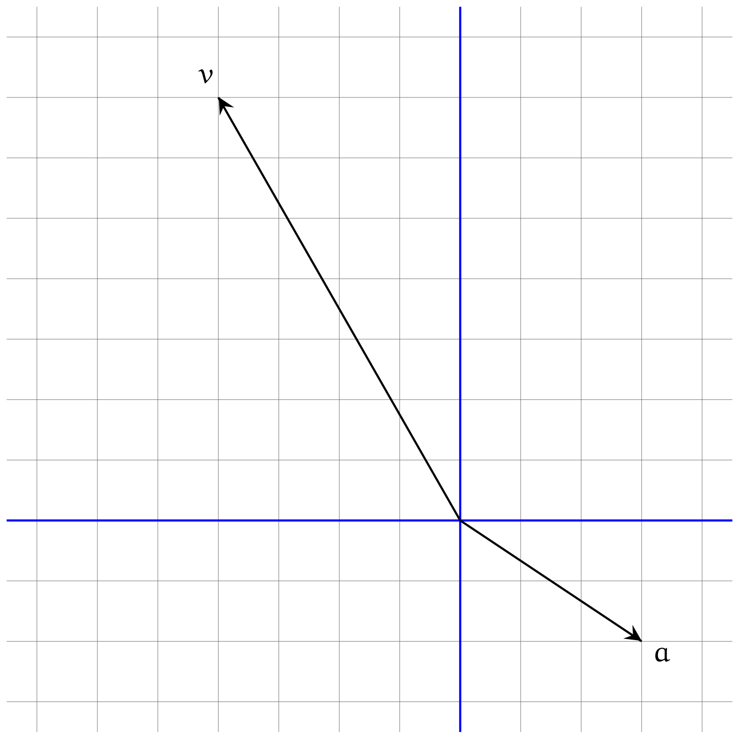
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -11 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ -23 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 27 CABN.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 54, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 35, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 33,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 42, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 19, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 33.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

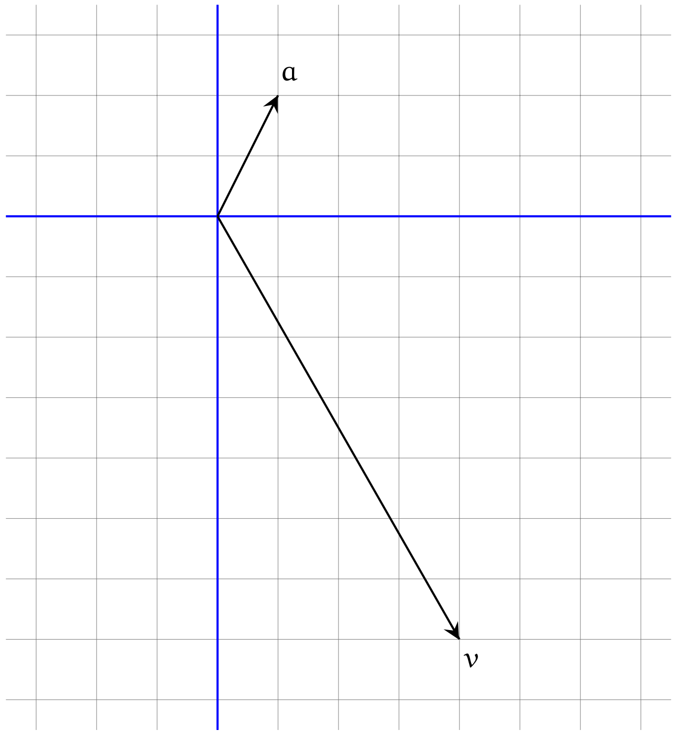
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -21 \\ 12 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 28 CCOY.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 77, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 18, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 29,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 5, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 49.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

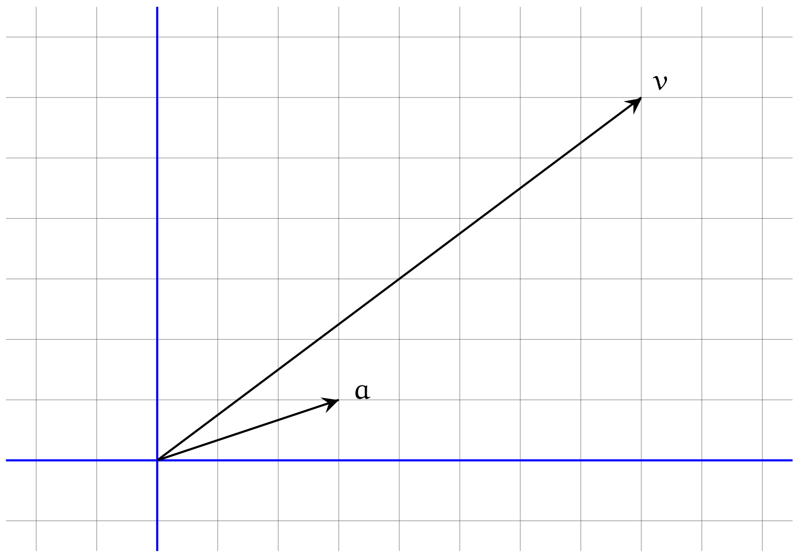
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -31 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $$I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 29 FCIC.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 74, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 35, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 45,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 26, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 19, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 41.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

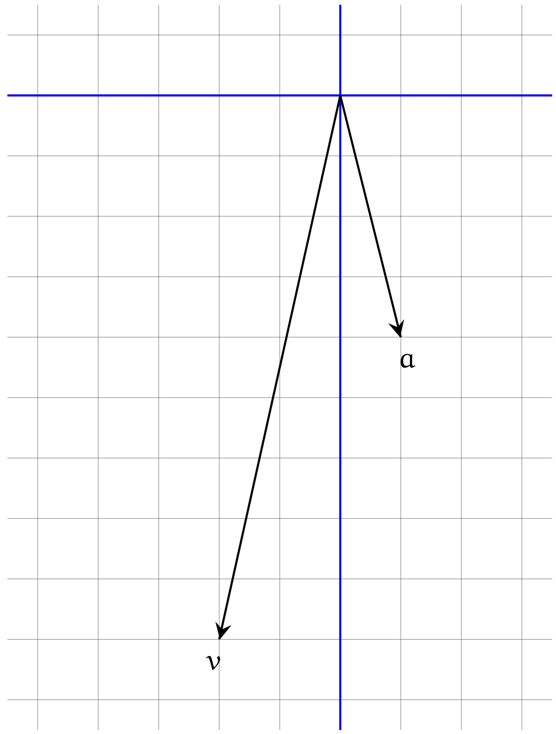
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\qquad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 30 FMI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 1, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 66, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 53,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 129, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 50, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 65.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

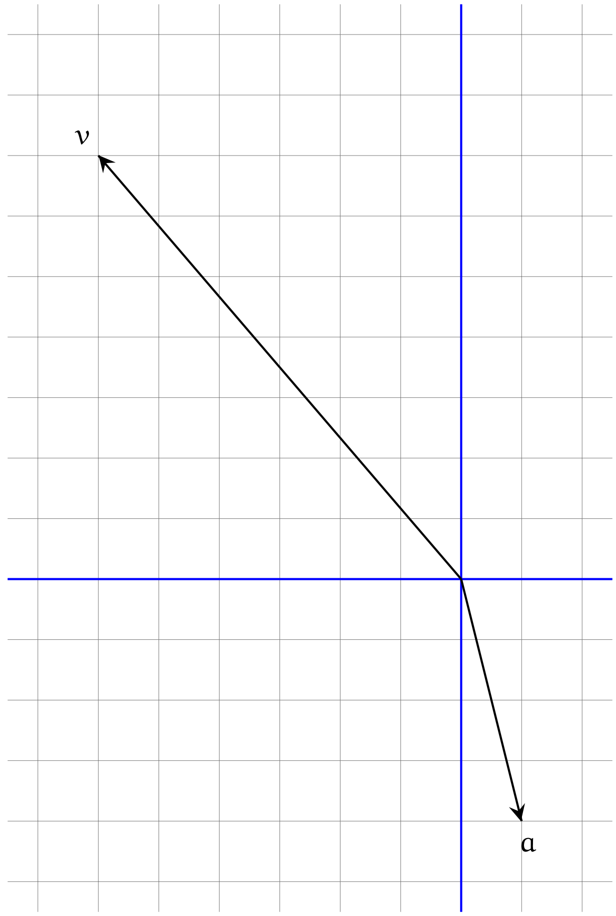
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, (1 - x^2) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p \, (1 - x^2) \, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 31 FGBE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 40, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 6, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 42,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 72, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 114, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 54.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

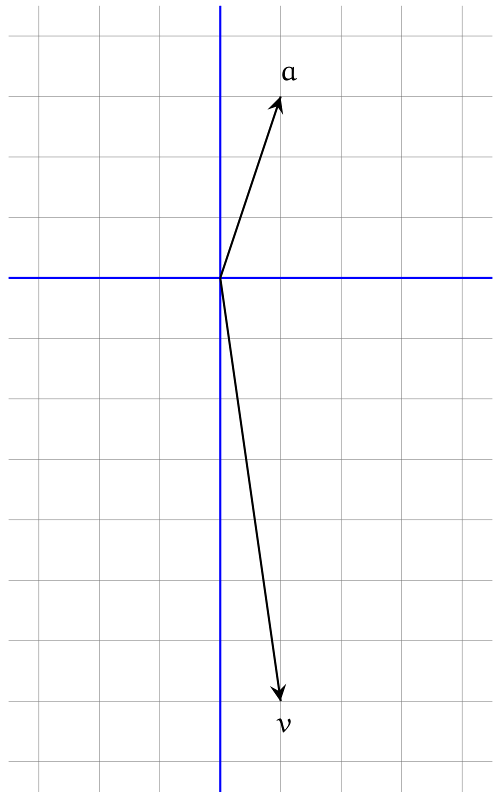
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 19 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ 23 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p := \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p\ dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 32 GGD.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 38, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 9,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 18, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 17.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

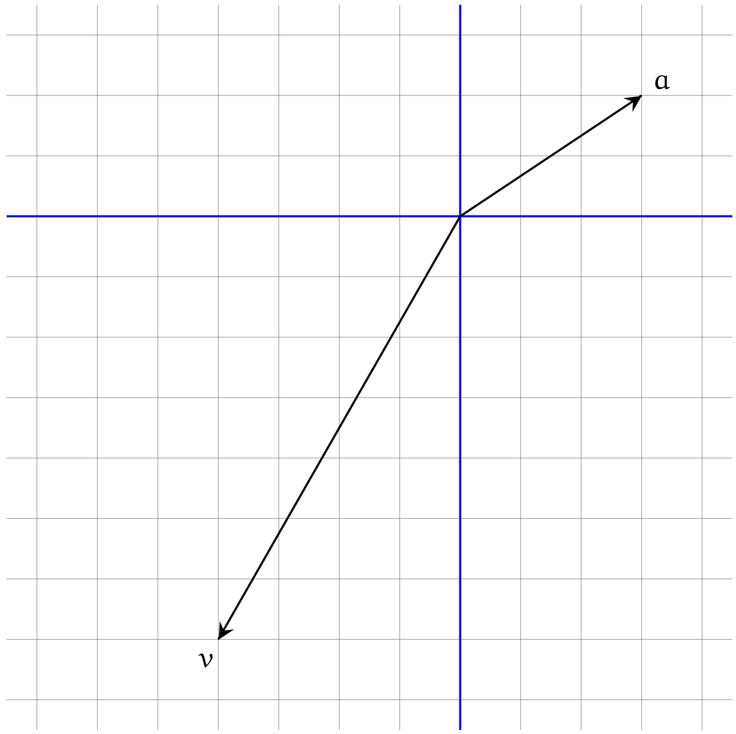
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -19 \\ 6 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -21 \\ -3 \\ 21 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Álgebra III. Tarea 1. Variante 33 IMA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 2, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 18, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 62,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 66, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 66, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 26.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

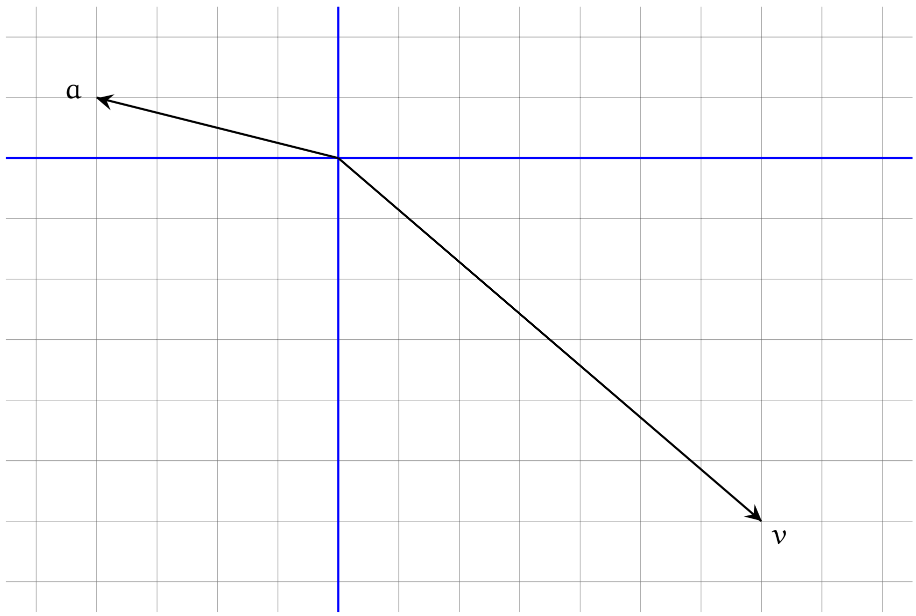
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \\ -10 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -14 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $\quad I_p := \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 34 JNJ.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 18, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 11, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 53,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 38, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 83, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 53.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

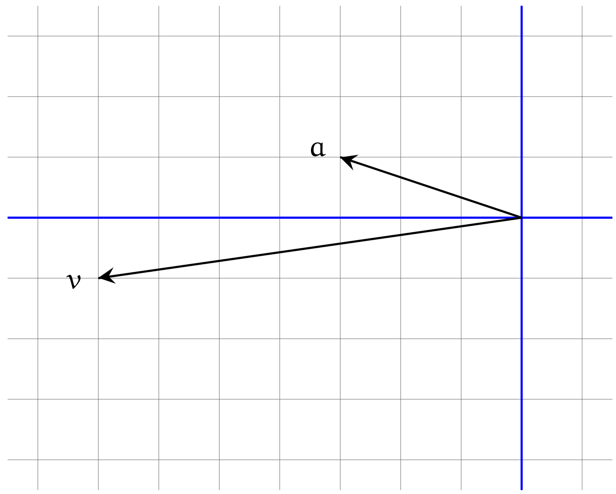
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 14 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $$I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 35 JGHE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 26, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 13,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 62, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 77.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

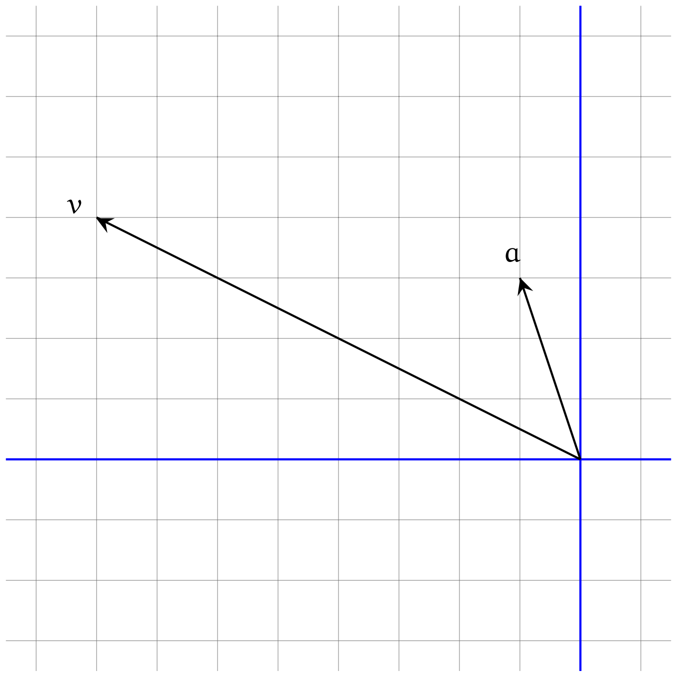
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ 19 \\ -2 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\quad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 36 LHOA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 12, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 17,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 1, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 76, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 65.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

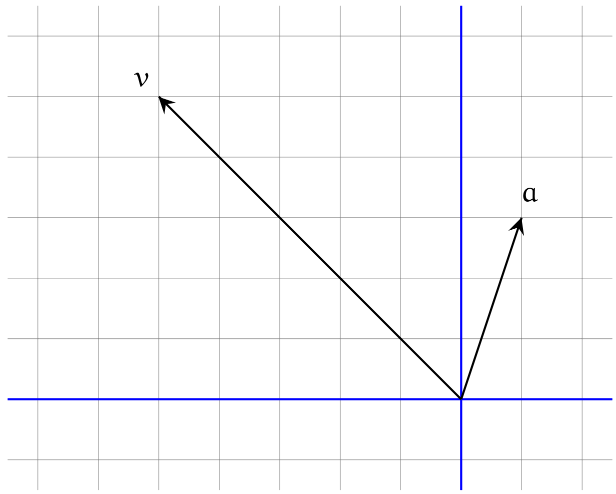
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 22 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, (1 - x^2) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p \, (1 - x^2) \, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 37 MMA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 26, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 81, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 43,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 10, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 13, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 35.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

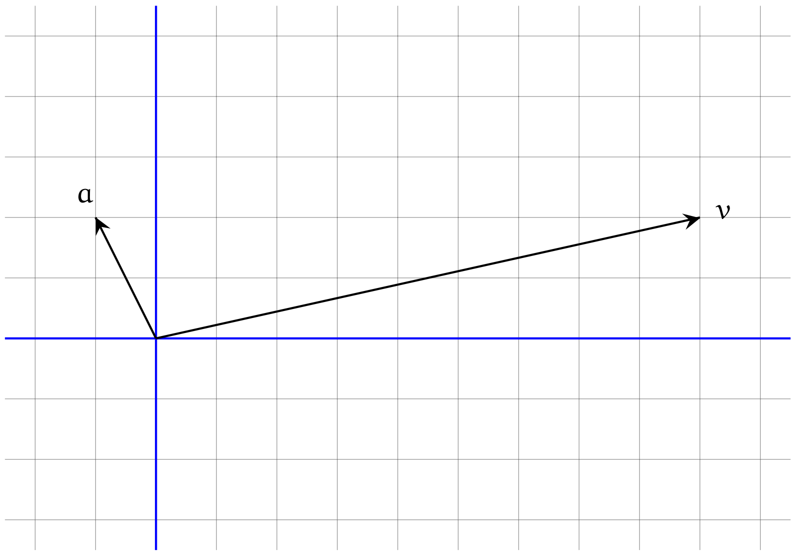
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 4 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 38 OCIA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 77, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 44, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 69,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 29, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 56, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 53.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

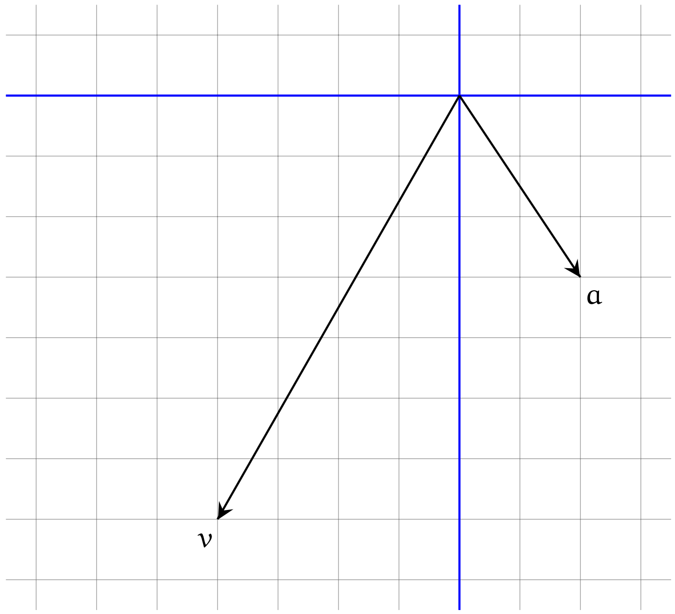
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -16 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 14 \\ 18 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 39 PHU.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 27, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 51, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 56,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 43, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 27, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 8.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

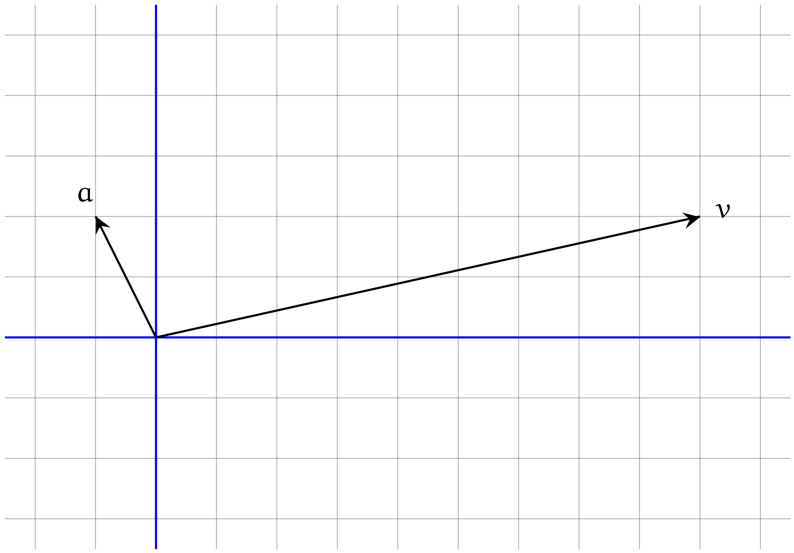
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -17 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 20 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 40 QMA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 19, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 51, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 36,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 35, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 27, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 20.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

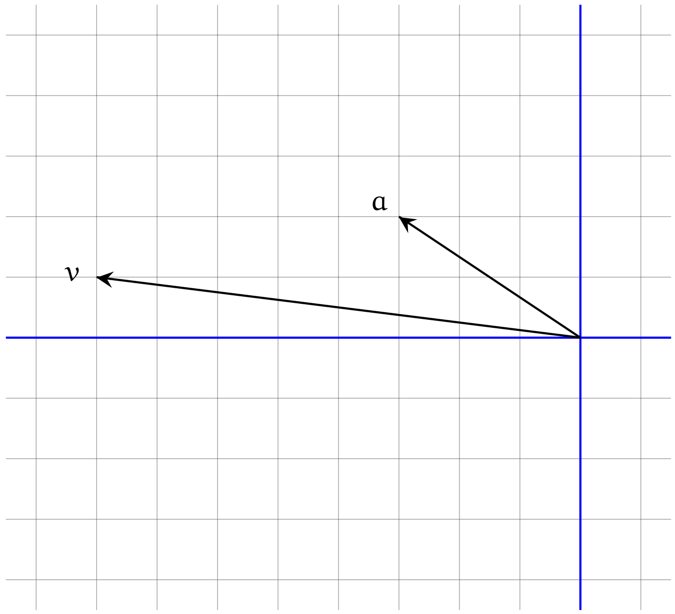
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ -10 \\ -24 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\quad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 41 RMAD.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 46, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 51, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 93,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 58, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 51, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 5.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

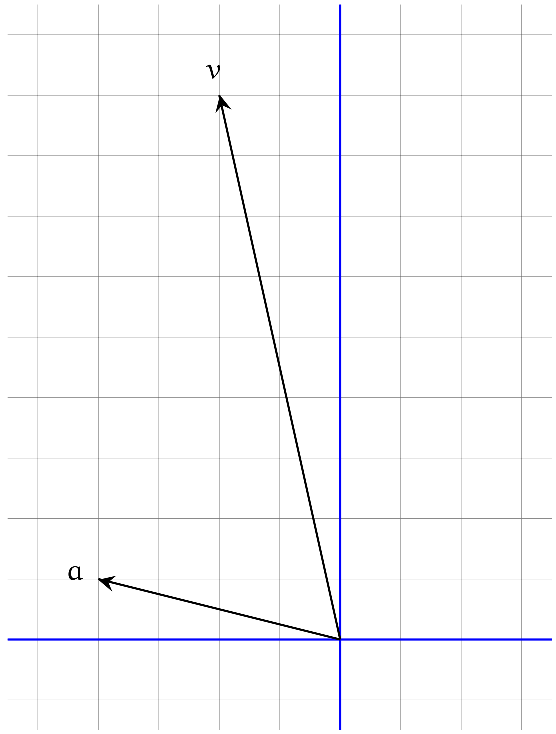
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -18 \\ -17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 42 RHI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 54, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 3, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 17,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 35, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 33.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

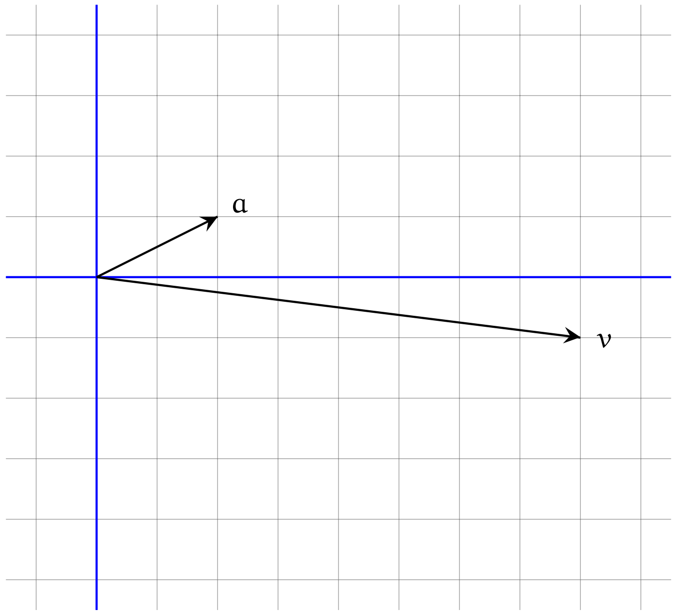
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 22 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\,(1 - x^2)\,dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 43 RQEI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 46, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 6, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 56,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 62, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 32.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

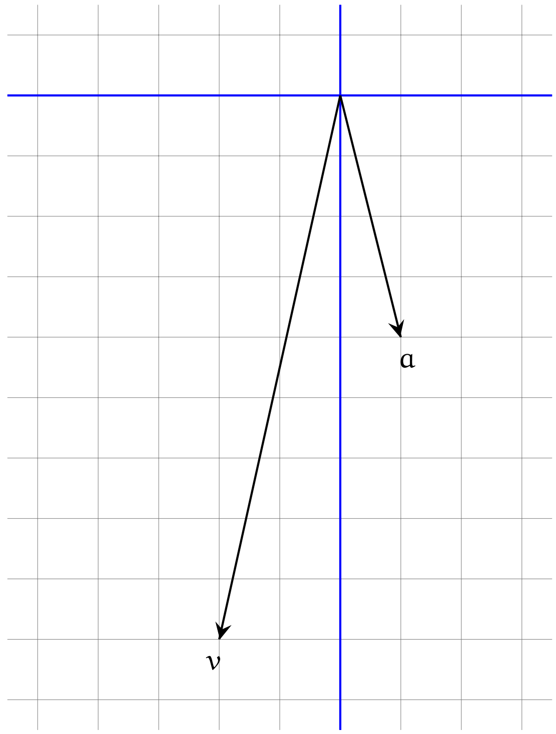
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ 18 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ -22 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $I_p := \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 44 SMS.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 81, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 73, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 50,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 5, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 18.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

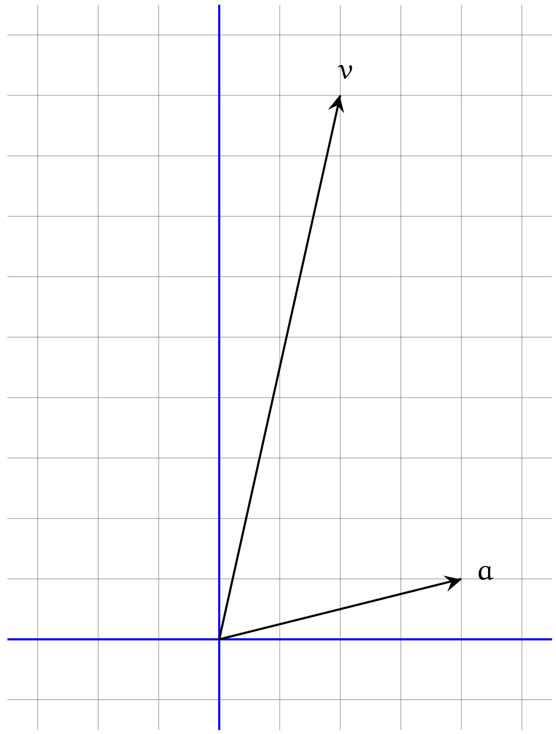
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \\ -25 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ -17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 45 SBE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 42, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 93, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 17,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 54, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 53.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

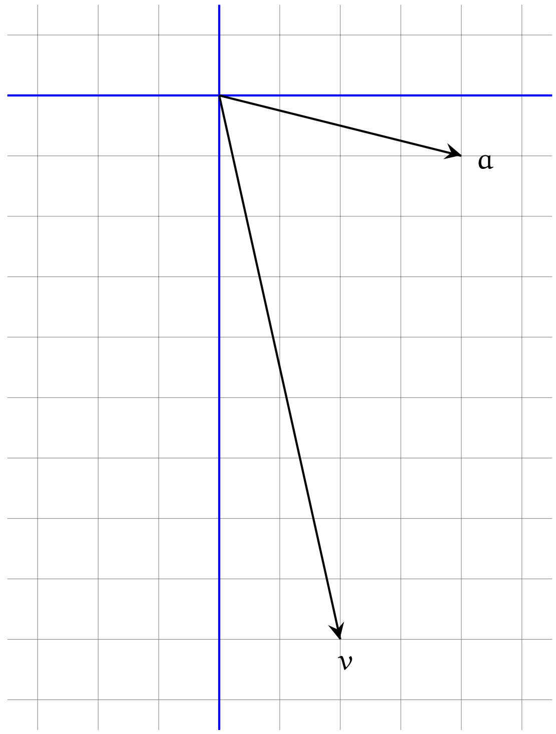
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 15 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 26 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 46 TVE.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 61, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 114, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 61,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 45, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 2, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 29.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

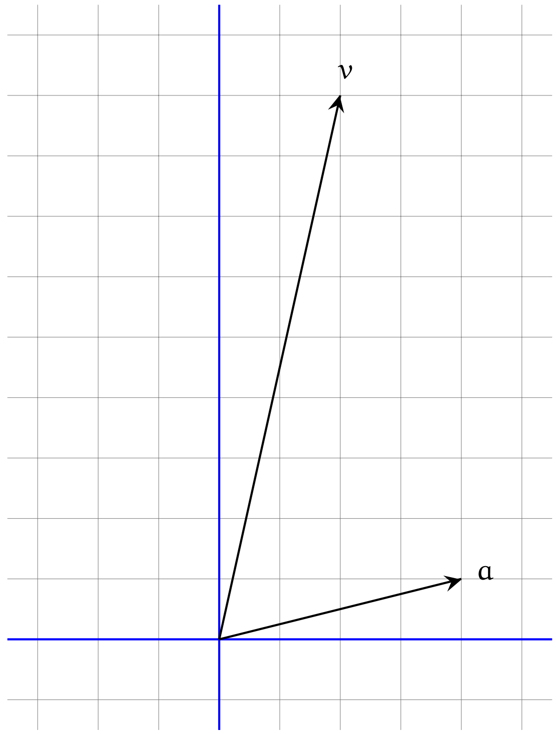
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -33 \\ -11 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\quad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 47 VBLA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 27, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 2,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 35, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 74.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

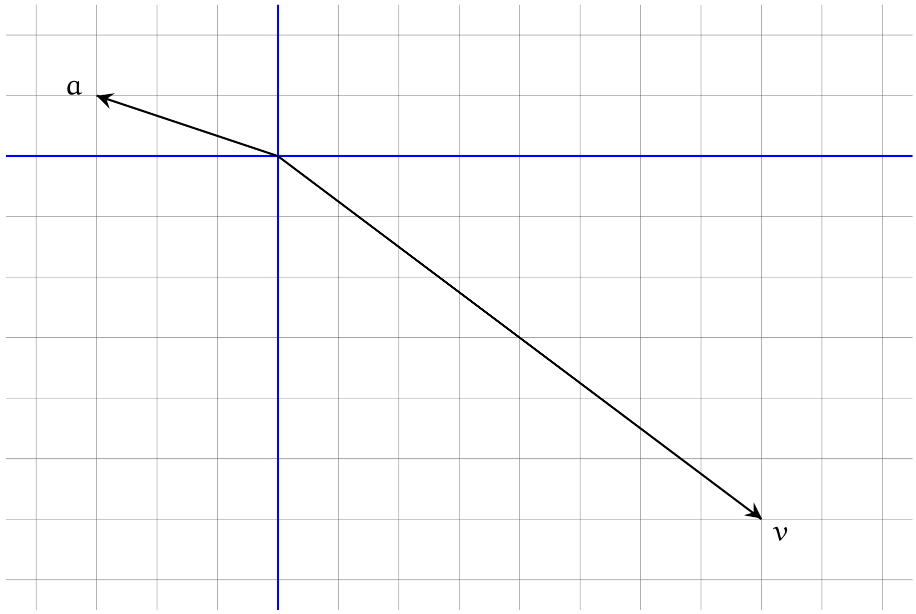
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 19 \\ -5 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \\ -17 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\qquad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 48 MVA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 89, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 36,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 5, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 37, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 40.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

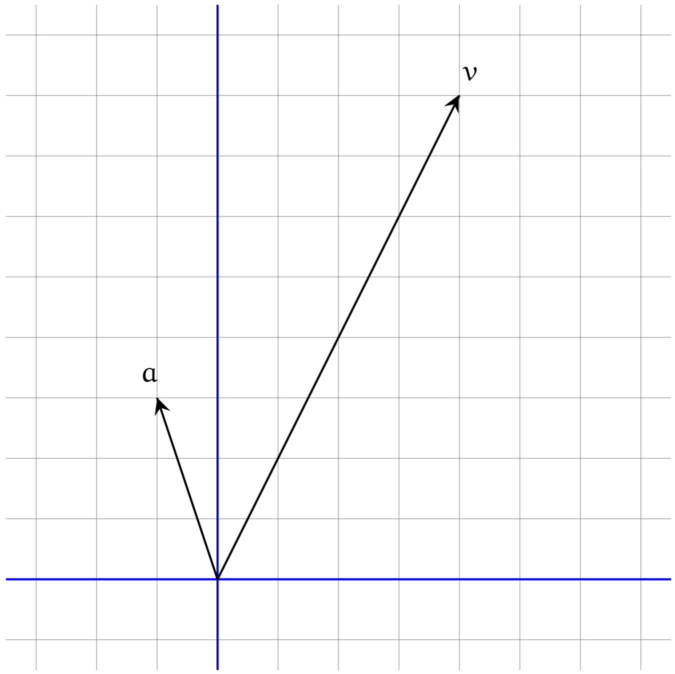
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -15 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,(1 - x^2)\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 49 BMS.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 58, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 53, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 41,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 66, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 69, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 61.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

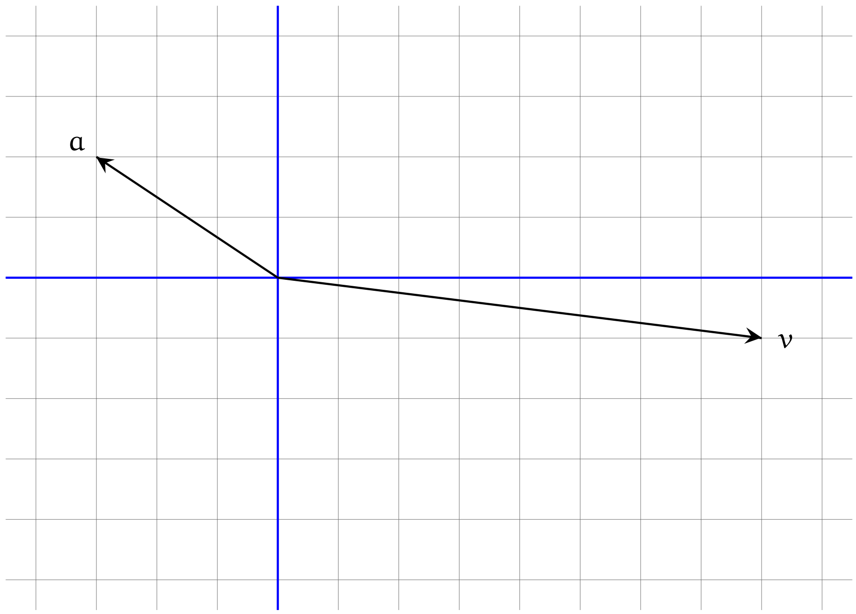
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 21 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\; dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\; dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 50 CMKD.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 33, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 35,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 74, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 29, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 75.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

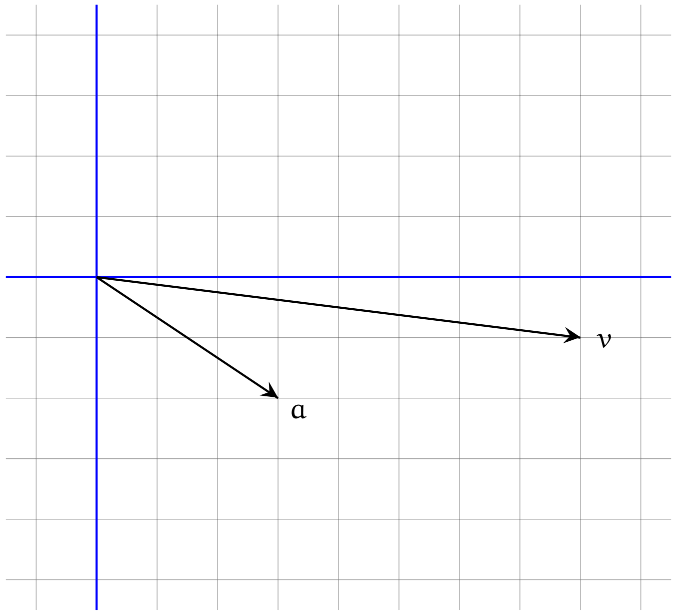
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -10 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ -2 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 51 CMJJ.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 45, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 22, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 21,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 33, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 30, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 25.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

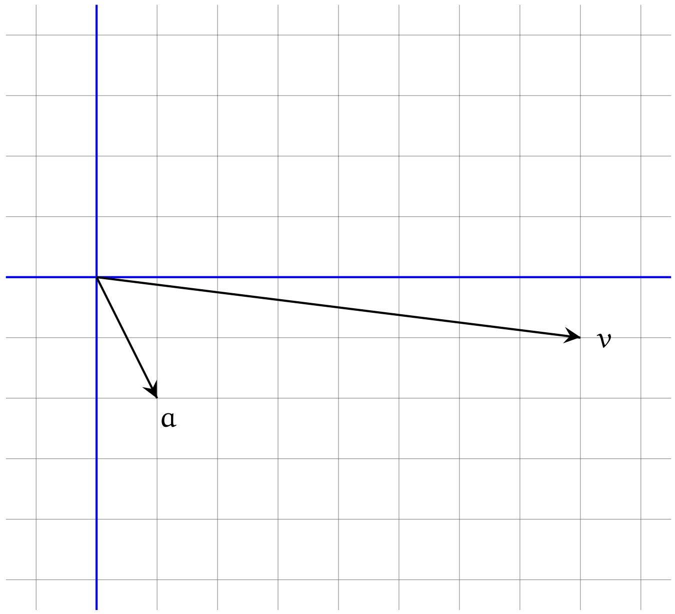
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ -17 \\ -13 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -22 \\ 22 \\ -6 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 52 GMF.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 40, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 73, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 5,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 40, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 45.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

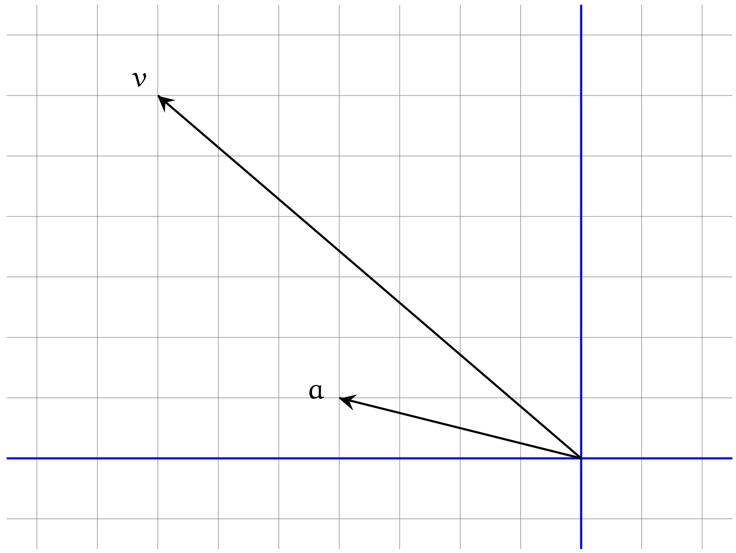
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ -1 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ -6 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $$I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 53 HMJI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 32, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 26, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 90,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 36, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 34, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 18.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

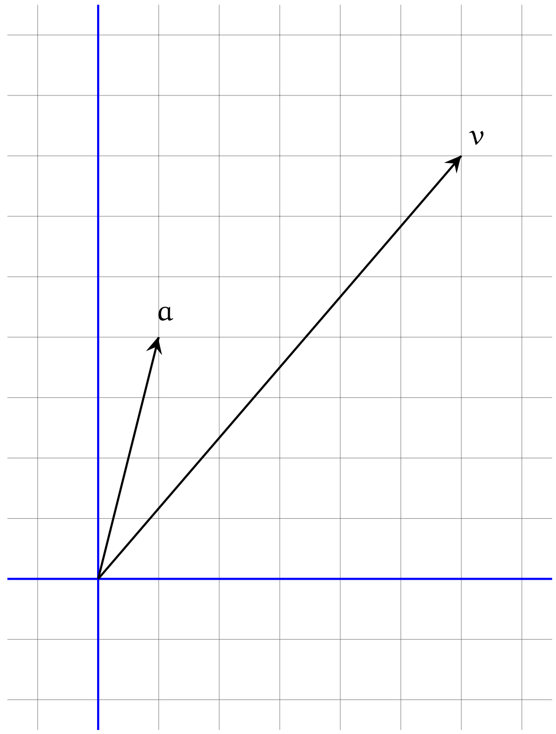
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -13 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ 17 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $$I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 54 MCEH.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 22, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 19,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 17, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 43.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

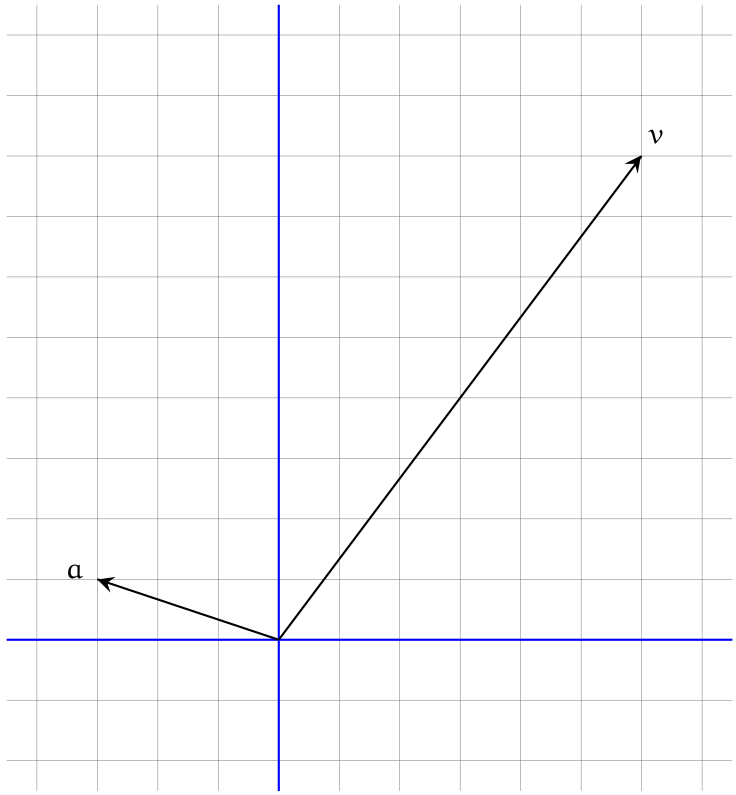
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -28 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ -25 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, (1 - x^2) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{4}{35}$	0	$\frac{4}{63}$

donde $I_p := \int_{-1}^{1} x^p \, (1 - x^2) \, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 55 MHOA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 30, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 93, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 57,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 46, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 45, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 25.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

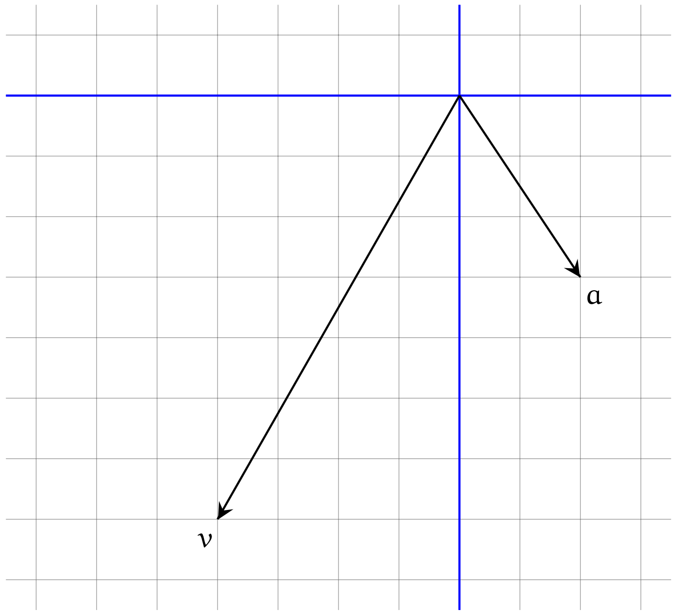
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 5 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 18 \\ -1 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p := \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 56 MARA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 66, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 81,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 29, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 42, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 25.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

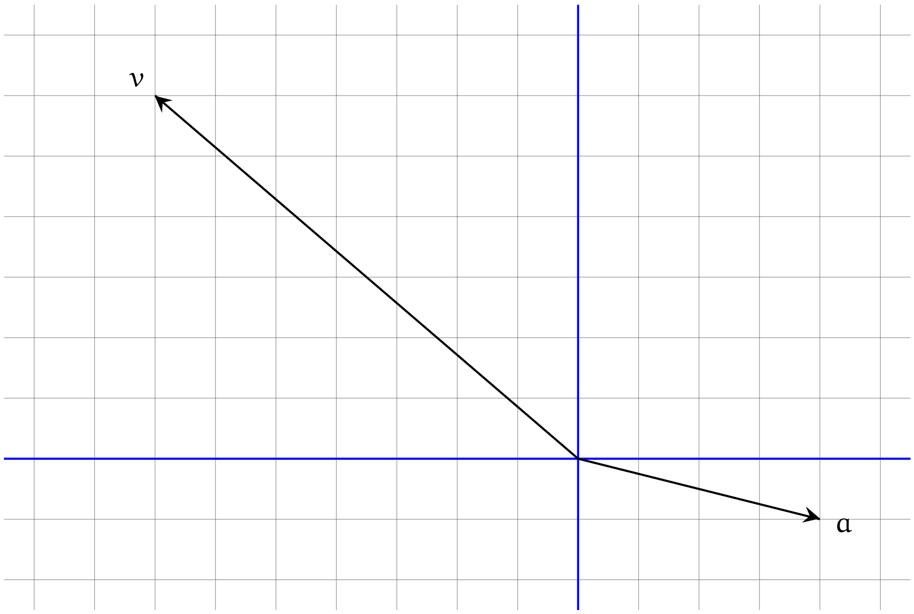
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -6 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 21 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 57 PRI.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 14, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 94, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 14,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 70, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 10, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 38.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

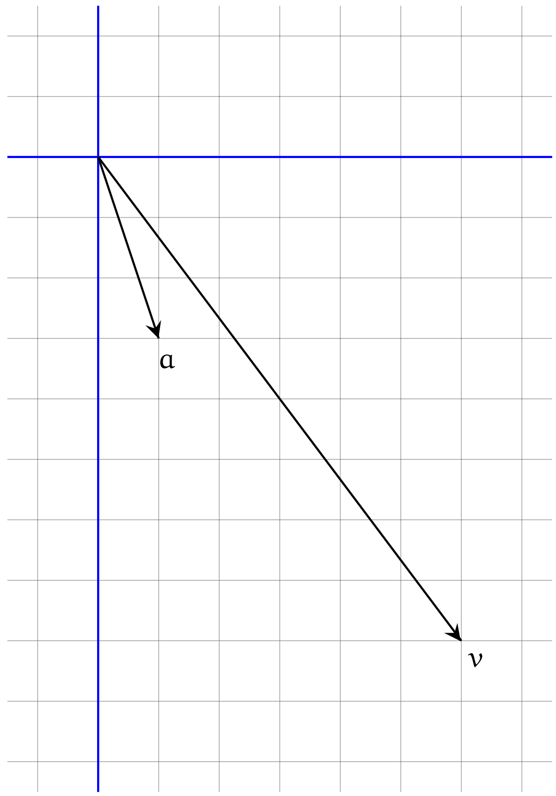
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -12 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -28 \\ -4 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Tarea 1. Variante 58 RCGA.

Producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 15 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 11, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 41, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 42,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 83, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 50.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

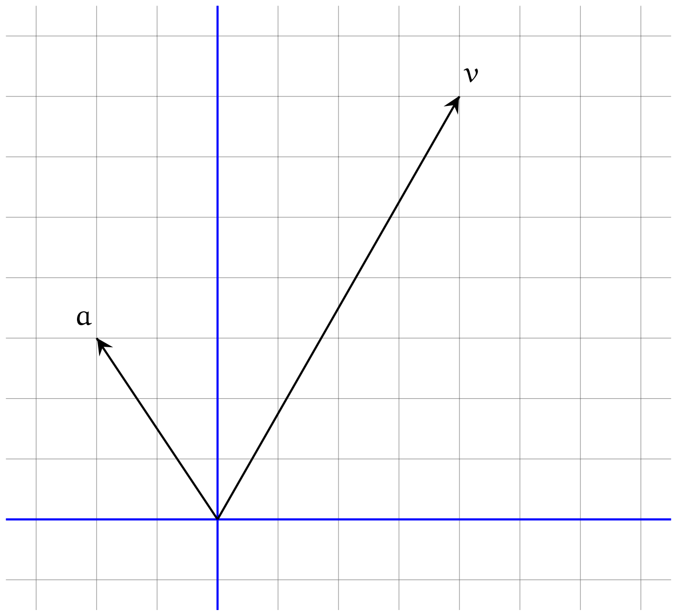
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *1 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *2 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ 19 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Aplique el método matricial de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\quad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 8. *3 %.*
Pruebe que los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ son ortogonales y construya algunos vectores $a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que a_1, a_2, a_3, a_4 sea una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^4$. Para la comprobación calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$