Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante α.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -7 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 2f(-1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -4 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	3	2	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -5 & -4 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -4 + 3x - 3x^2 - x^3, \qquad f_2 = 1 + x + x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 2 + x + x^2 - x^3,$$
$$f_4 = -2 - 4x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_5 = -1 + x - 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante β.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) :\quad f'(-3) - 2f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) :\quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	2
rango$(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = 1 + x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = 3 - 2x + x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = -3 - 3x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 1 AJAS.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & -5 & 1 \\ -6 & -4 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) - 5f(3) = 0\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 3x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 1 + 4x + 4x^2 - 3x^3, \qquad f_3 = 3 + 4x + 3x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -1 - 4x - x^2 - 3x^3, \qquad f_5 = 2 + 2x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 2 BTCF.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ -8 & -7 & -8 & -1 & -1 \\ 8 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) + 4f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	4	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -4 + 3x - 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 4 + 3x - 5x^2 + x^3, \qquad f_3 = -1 + 3x - 2x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = 1 + x - 2x^2, \qquad f_5 = 3 + 3x - 5x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 3 CSA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(2) + 3f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u + w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u + w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2 = -3 + 3x - x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 2 + x - 2x^3, \qquad f_5 = 1 + x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 4 CNKM.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 4 & -5 \\ 4 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 0\Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \Big\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\Big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	2	4	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & -4 \\ 7 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -1 + x + 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -3 + x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = -2 + x + 3x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -2 - 2x + x^2 - x^3, \qquad f_5 = 1 - 4x + 3x^2 + 4x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 5 CNLE.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(2) - 5f(2) = 0\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(2) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 2x - x^2 + x^3, \qquad f_2 = 1 - 4x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = 3 - 2x - 4x^2 - x^3,$$
$$f_4 = 2 - 5x + 3x^3, \qquad f_5 = 4 - 3x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 6 DPE.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) - 3f(3) = 0\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \; AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \; \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + 4x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 2 + 4x - 2x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 1 + 2x - 2x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 2 + 4x + x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x - x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 7 DEER.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 2f(-2)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = 4 + 2x - 3x^2 - x^3, \qquad f_3 = 2 + x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 3 - x - 3x^2 + x^3, \qquad f_5 = 2 + x + 2x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 8 DLRTH.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon \ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon \ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 & 4 & -5 \\ -3 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 2f(-2)\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = -4 + 2x - 4x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x + 2x^3,$$
$$f_4 = 1 + 3x - x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = 1 - x + 3x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 9 DGGI.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-1) - 3f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 4 & -4 & -6 \\ -7 & -6 & 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 3x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 2 + x + 2x^2, \qquad f_3 = 2 + 2x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = 3 - 3x + 4x^2 - x^3, \qquad f_5 = -4 + x - x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 10 DJRA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 2f(2)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_3 = 1 - x + 4x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = -4 + 2x - x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 11 FMFD.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 2f(3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	2
rango$(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 4 + 3x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 4 + 2x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = -4 + 3x - 4x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 4 - 4x - 4x^2.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 12 GDLD.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & -6 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) - 2f(3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 & 1 \\ -6 & -6 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 - 2x - 3x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = 3 - 4x - 3x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x + x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 3 + 3x + 2x^2 - x^3, \qquad f_5 = 1 + 3x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 13 GLMA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & -8 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-2) - 2f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & -5 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_2 = -4 - 4x - x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 + x^2 - 3x^3,$$
$$f_4 = 3 + 2x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5 = -2 - 2x - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 14 GSLE.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & -5 \\ -4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-1) - 5f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 2x + 3x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 1 - x + 3x^2 - x^3, \qquad f_3 = -1 + 4x + x^2 - 3x^3,$$
$$f_4 = 2 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -1 - 3x - 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 15 KSJG.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ -8 & -2 & -2 & 4 & -8 \\ -8 & 1 & -7 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 2f(1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\; AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\; \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u + w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u + w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -3 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 1 - x + x^3, \qquad f_3 = 1 - 4x + 3x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 1 + 3x - 4x^2 + x^3, \qquad f_5 = 2 - 4x + 2x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 16 LSS.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 & 5 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon\quad f'(-1) + 3f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon\quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 4x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2 = 2 - 3x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3 = -3x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = 4 - 3x - x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 1 + x + 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 17 LPS.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\colon \quad f(-2) = 2f(0)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -1 + 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -1 - 2x - 4x^2 - 3x^3, \qquad f_3 = 3 + 3x + 2x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 4 + 2x - 4x^2 - 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 18 MPDD.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -6 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-1) + 5f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -2 + 3x - 4x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 2 + x + 2x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = -2 - 4x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5 = 1 - 2x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 19 MHF.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-2) - 4f(-2) = 0\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(2) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 4x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_2 = 3 + 3x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 1 + x + x^2,$$
$$f_4 = 3 + 2x + 4x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = -3 + 2x + x^2 - 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 20 MME.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(1) - 2f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\; AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\; \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 4 + 4x - 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -2 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 1 - x + 2x^2 + x^3,$$
$$f_4 = x + x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 2 - 3x + 4x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 21 MRCK.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -7 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-3) - 4f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	3	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 2 & 3 \\ -6 & -6 & 4 & 6 \\ -5 & -5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 4x + x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = 3 + 3x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 1 + x + x^3,$$
$$f_4 = -2 + 2x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 3 + 3x + 4x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 22 PHJL.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 2f(0)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -2 - x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -2 - 4x - x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 4 + 2x - 4x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 1 + x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 1 + x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 23 RAJA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\colon \quad f'(3) - 4f(3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & -3 & 5 \\ -6 & -2 & 4 & 6 & -6 \\ -5 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = -1 + x + 4x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 2 + 3x + x^3,$$
$$f_4 = -1 + 2x - 2x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -1 + x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 24 RCE.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5\colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\colon\quad f'(-1) - 4f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\colon\quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	2	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 - x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 2 + x + 3x^2 + x^3, \qquad f_3 = 3 + x + 2x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 1 + x + x^2, \qquad f_5 = -2 - 3x - 4x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 25 RDIDJ.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 5 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 2f(3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	4	2	4
rango$(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -7 & -5 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + 3x^2 - 3x^3, \qquad f_2 = 2 + x + 3x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = -3 - 3x + 2x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = 4 - 2x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 2 + x + 4x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 26 SRGA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-2) + 3f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	4	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 2x + 3x^2 - 2x^3, \qquad f_2 = 3 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3 = 2 + 2x - x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 2 + x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 3 + 2x + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 27 TMMA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(2) - 4f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & -5 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -2 + x + 3x^2 - x^3, \qquad f_2 = 3 + 4x - 2x^2 - x^3, \qquad f_3 = 3 - x - 4x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -1 + x + 2x^2 - x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x + 2x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 28 TELD.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -6 & 5 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-1) + 4f(-1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = x - x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_3 = -2 + 3x - x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = 1 - 2x - 4x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 2 + 4x + 3x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 29 UTAV.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & -8 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0 \big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u + w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u + w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + 4x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 2 + 3x + 2x^2 - x^3, \qquad f_3 = 1 + 3x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -1 + 4x + 2x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -4 - x + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 30 VNDI.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 2f(1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -3x - x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -2 + 3x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 + 2x + 4x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = -4 - 4x - x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -1 + 2x + 3x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 31 VHA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-2) - 5f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -3 - 4x - x^2 - 4x^3, \qquad f_2 = 1 + 3x - 2x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x - 3x^2 + x^3,$$
$$f_4 = x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 4 - 4x - 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 32 VMJJ.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ -8 & -6 & -2 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 2f(0)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & 4 & 3 \\ -6 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + 4x - 3x^2 - x^3, \qquad f_2 = 1 - x - x^2, \qquad f_3 = 1 + 4x + 2x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 2 - 4x - 3x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 33 GMOA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0 \big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ -6 & -2 & 4 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 3x + 4x^3, \qquad f_2 = 2 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = -1 - 2x + x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = 2 + x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 3 + 2x + x^2 + 4x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 34 VALA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -7 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(1) + 4f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	2	4	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 2x - 3x^2 - 4x^3, \qquad f_2 = 4 + 4x + x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 2 + 3x + 2x^2 + x^3,$$
$$f_4 = 3 + 3x + x^2 - x^3, \qquad f_5 = -4 - 4x - 4x^2 - 4x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 35 ZPJ.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -8 & 1 & -7 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(0) = 2f(-3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -6 & 4 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	4	2	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 1 + 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3 = -1 + 3x - x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 3 + x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 3 - 3x - 3x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 36 BRMF.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 2f(1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	4	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -2 - 2x - 4x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -1 - 3x - 4x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 2 + x + 3x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 1 + x + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 37 RMIA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(2) + 2f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ -5 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = 2 + 3x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = 2 + 4x + x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -1 + 2x - 3x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 38 MRHA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 2f(-3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 4x - 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 3 + x + 2x^2 - 3x^3, \qquad f_3 = 3x + 2x^2 - x^3,$$
$$f_4 = 3 + x + x^2 - x^3, \qquad f_5 = 4 + x + x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 39 AVMA.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -2 & -6 \\ -3 & -6 & -5 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(0) = 2f(3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & -4 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & -5 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	3	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 4x - 4x^2 - x^3, \qquad f_2 = 4 - x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = 4 + 2x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = 3 - x + 3x^2 + x^3, \qquad f_5 = 2 - x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 40 MCCO.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -6 & -1 & -4 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-2) + 2f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	3	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - x - 2x^2 - 2x^3, \qquad f_2 = -2 + x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = -1 + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -3 + x + x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = -3 - x - 4x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 41.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 2f(2)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	3	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + x^3, \qquad f_2 = 3 + x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = -1 - 3x + 2x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = 3 + x + 4x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 3 + x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 42.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 2f(3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x - x^3, \qquad f_2 = 2 + 2x + x^2 - x^3, \qquad f_3 = 2 + 3x + 2x^2 - x^3,$$
$$f_4 = 2 + x + 4x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = -1 + 4x + x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 43.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) + 5f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 - 3x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 1 - 2x + x^2 + x^3, \qquad f_3 = 3 - 2x - x^3,$$
$$f_4 = 3 + x - 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5 = -1 + 4x + 4x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 44.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0 \Big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 3 + 2x + 4x^2, \qquad f_3 = 2 - 2x + 3x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 3 + 3x + 4x^2 + x^3, \qquad f_5 = -4 + 3x - 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 45.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & -5 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(3) + 5f(3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	3	2
rango$(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 - x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 3 + 2x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 - x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -1 + x - 4x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 3 - 2x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 46.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 4 & -6 \\ 6 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(2) + 5f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	4	3	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 4x + 2x^2 - 3x^3, \qquad f_2 = 4x + 3x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x + x^2 - 3x^3,$$
$$f_4 = 1 + 3x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_5 = 1 - x - 2x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 47.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(2) - 3f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 2 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 2x + 3x^3, \qquad f_2 = -2 + 4x - 3x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = 1 - 2x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = 1 - 2x + 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 48.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-2) - 3f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u + w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u + w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	4	2	4
$\mathrm{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 4 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 2 + 3x + x^2 + x^3,$$
$$f_4 = -4 + 2x - 2x^2 - 2x^3, \qquad f_5 = 2 + 4x + 4x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 49.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 2f(-3)\right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-2) = 0\right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f''(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = -2 + 2x + 4x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 1 - 3x - 2x^3,$$
$$f_4 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = -2 - x - 4x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 50.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(2) - 2f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -4x + 5x^2 + x^3, \qquad f_2 = 4 + x + 5x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = -1 + x - 3x^2 - x^3,$$
$$f_4 = -1 - x + 4x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 2 + x + 2x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 51.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0 \big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	3	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = -2 + 4x - 3x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 2 - 2x + 2x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 2 - 2x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5 = -2x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 52.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_0^2 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \left\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(2) = 0 \right\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f''(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -1 + 3x - x^2 - 4x^3, \qquad f_2 = 4 + 4x + 3x^2 - x^3, \qquad f_3 = 1 + 2x + x^2 - x^3,$$
$$f_4 = -2 - x - 2x^2 - x^3, \qquad f_5 = 1 + x + x^2.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 53.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -4 & -3 \\ 3 & -4 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) :\quad f(-2) = 2f(-1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) :\quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	3	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -2 + x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = 4 + x - 3x^3, \qquad f_3 = -3 - x - x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = 3 - 2x - x^2 - 3x^3, \qquad f_5 = -3 + x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 54.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ -4 & -8 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(3) + 2f(3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 & 5 \\ -5 & 5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	2	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_2 = -3 + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 1 + x + 3x^2 - 2x^3,$$
$$f_4 = 2 + 2x + x^2 + x^3, \qquad f_5 = -1 + 3x + x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 55.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & -5 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f(-1) = 2f(3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 5 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - x - x^2, \qquad f_2 = -1 + 2x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 + 3x + 3x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 2 + 2x + 3x^2 - 3x^3, \qquad f_5 = 3 + 2x + 3x^2 - 4x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 56.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) - 3f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 4x - 2x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 3 + x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = -3 - 4x + 2x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 3 + x + 4x^2, \qquad f_5 = 2 + x + 2x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 57.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(1) - 5f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	2	4
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 4x + 4x^3, \qquad f_2 = -4 + 5x + 4x^2 + x^3, \qquad f_3 = 3 + 5x + x^2 + 4x^3,$$
$$f_4 = -2 - 5x - 4x^2 - x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 58.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \Big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-2) = 0 \big\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f''(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	4	3
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + x - x^2 - x^3, \qquad f_2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 4 + x - x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 2 + x - x^2, \qquad f_5 = 2 + 2x + x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 59.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 2f(-3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(-1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} (u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 2 & -5 \\ 6 & -7 & 2 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & -5 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	4	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -4 - 4x - 4x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 1 + x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = x - x^2 - 3x^3,$$
$$f_4 = 1 + x + x^2 + 4x^3, \qquad f_5 = 2 + x + 3x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 60.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-3) + 3f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + x - x^2 + x^3, \qquad f_2 = 3 + x + x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 3 + x + 2x^3,$$
$$f_4 = 1 - 2x - 3x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x - x^2 - x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 61.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ 6 & -2 & -4 & -6 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(1) = 2f(2)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(2) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 4x + x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 3 + 5x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_3 = 1 + x + x^3,$$
$$f_4 = 2 + 4x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5 = -3 - x + 2x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 62.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ -5 & -5 & -6 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(1) + 3f(1) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(1) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	3	2
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 + 2x + 2x^2 - x^3, \qquad f_2 = -3 - 3x + 2x^2 - 2x^3, \qquad f_3 = 1 + x + x^2 - x^3,$$
$$f_4 = 3 + 3x - x^2 + x^3, \qquad f_5 = 2x + x^2 - 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 63.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(-1) = 2f(-3)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-2) = 0$ y $f''(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u + w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u + w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u + w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 - x + 3x^2 + x^3, \qquad f_2 = x - x^2 + x^3, \qquad f_3 = 1 - 4x + 4x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 3 + 2x - x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = 1 + x - x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 64.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f'(-2) + 5f(-2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\|\mathcal{F}\| = n$	3	2	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3, \qquad f_2 = -2 + 3x + x^2 + 4x^3, \qquad f_3 = -2 - 3x + 2x^2 - x^3,$$
$$f_4 = -1 + 2x + x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = 4 + 2x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 65.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 \colon\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon \quad f(3) = 2f(-1)\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \quad f(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f''(-2) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-3) = 0$ y $f''(-2) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\; AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\; \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u - w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u - w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u - w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = -1 + 4x + 4x^2 + 3x^3, \qquad f_2 = 2 + 4x + x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = 1 + 3x + x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 2 + 3x + x^2 + 3x^3, \qquad f_5 = 1 + 2x^2 + 3x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 66.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \; Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 & -5 & 5 \\ -4 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(3) + 3f(3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(1) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	2	3
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 + 3x + 2x^2 + x^3, \qquad f_2 = 4 - 4x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = -4 - 2x - 4x^2 + 2x^3,$$
$$f_4 = 3 + 4x + 3x^2 + x^3, \qquad f_5 = 1 + 3x + 2x^2.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 67.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 :\ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & -6 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ -6 & 3 & -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) :\quad f'(2) + 4f(2) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) :\quad f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f''(3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(-1) = 0$ y $f''(3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ AX = XA\right\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\right\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} + w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u+w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u+w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u+w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 6 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	4	3	4
$\text{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 3 - x - 4x^2 - 3x^3, \qquad f_2 = 3 + x + 2x^2 + x^3, \qquad f_3 = 3 + 2x + 2x^2,$$
$$f_4 = 3 - 3x - x^2 + 2x^3, \qquad f_5 = 4 + 2x + 3x^2 + x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Tarea 4. Variante 68.

Bases y dimensión.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = 0_4\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Construya una base del siguiente espacio de polinomios. Haga la comprobación.

$$S = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-3) - 5f(-3) = 0\}.$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Denotemos por $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de los polinomios de grado $\leqslant 3$ (incluso al polinomio cero). Se considera el conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido de la siguiente manera:

$$S = \{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-3) = 0\}.$$

1. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio S.
3. Haga las comprobaciones: verifique que los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ pertenecen a S, esto es, cumplen con las condiciones $f(3) = 0$ y $f'(-3) = 0$.

Ejercicio 5. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ AX = XA\}$, donde A es la siguiente matriz. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. *1 %.*
Construya una base del espacio $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}$, donde A es la matriz dada. Haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. *1 %.*
Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. *1 %.*
Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcule $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Haga la comprobación: $(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Transforme la matriz A en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Luego transforme la matriz $A^\top$ en una matriz escalonada o pseudoescalonada y calcule su rango. Indicación: no se recomienda transformar A o $A^\top$ en matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *1 %.*
Están dadas tres matrices A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B y C. Llene la siguiente tabla:

	A	B	C
$\dim(V) = m$			
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	3	4	2
$\operatorname{rango}(\mathcal{F}) = r$			
$\dim(S)$			
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.?			
¿genera $\mathcal{F}$ el espacio V?			
¿es $\mathcal{F}$ una base de V?			

Ejercicio 11. *1 %.*
Con operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida, encuentre un subsistema básico de las columnas y escriba las demás columnas como combinaciones lineales de las básicas. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *2 %.*
Halle una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Escriba las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Haga las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. *2 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 2 - x + 4x^2 + x^3, \qquad f_2 = -4 - x - 3x^2 - 4x^3, \qquad f_3 = 1 + 4x + 2x^2 - 4x^3,$$
$$f_4 = 1 - x + 2x^2 + x^3, \qquad f_5 = 1 - 3x + 3x^2 + 2x^3.$$

Ejercicio 14. *1 %.*
En este y los siguientes ejercicios se consideran los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Construya una base del subespacio $S_1 + S_2$ como un subsistema básico del sistema de vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Escriba los demás vectores como combinaciones lineales de los vectores que forman ese subsistema básico. Haga las comprobaciones.

Ejercicio 15. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_1)$.

Ejercicio 16. *1 %.*
Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2. Haga las comprobaciones. Calcule $\dim(S_2)$.

Ejercicio 17. *1 %.*
Construya una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprueba que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Haga la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 18. *1 %.*
Extienda la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.