Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

Objetivos. Conocer sistemas de ecuaciones lineales con parámetros, aprender a dividir la solución en varios casos.

Requisitos. Análisis de un sistema de ecuaciones lineales, eliminación de Gauss–Jordan, matrices escalonadas reducidas (o pseudoescalonadas reducidas).

1. Ejemplo. Resolver el sistema para todo valor del parámetro λ:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 1; \\ -6x_1 & + & 3x_2 & = & \lambda. \end{array} \right.$$

Solución. Escribimos el sistema en forma matricial y reducimos la matriz del sistema en una matriz pseudoescalonada:

$$\left[\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & \lambda \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 += 3R_1} \left[\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{array} \right]$$

Luego la situación se divide en dos casos:

I. Si $\lambda \neq -3$, entonces el sistema es inconsistente.

II. Si $\lambda = -3$, entonces el sistema es consistente indeterminado, y la solución general es

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos una solución particular (por ejemplo, con $x_1 = 2$):

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Hacemos la comprobación para esta solución particular (recordando que $\lambda = -3$):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3 \\ -12 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

□

2. Ejemplo. Determinar para cuáles valores de λ el sistema es compatible:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & x_2 & = & \lambda; \\ -6x_1 & + & 2x_2 & = & 3. \end{array}\right.$$

3. Ejemplo. Resolver el sistema para todo valor del parámetro λ:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & = & -2; \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & -4. \end{array} \right. .$$

Solución. Transformamos la matriz del sistema en una matriz pseudoescalonada. Para tener pocas entradas dependientes de λ convertimos la entrada $(2,2)$ en un pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 += -R_2} \left[\begin{array}{cc|c} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Consideremos dos casos:

I. $\lambda = 2$. En este caso la primera ecuación desaparece, el sistema es consistente indeterminado, y la solución general es

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2 - 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos una solución particular (con $x_1 = -3$):

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Comprobación para esta solución particular (y $\lambda = 2$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 4 \\ -12 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

II. $\lambda \neq -2$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{\lambda - 3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 += -2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

El sistema es consistente determinado:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

$\square$

4. Ejemplo. Resolver el sistema para todo valor del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 & + & x_2 & = & 2; \\ x_1 & + & \lambda x_2 & = & -2. \end{cases}$$

Solución. Transformamos la matriz del sistema en una matriz pseudoescalonada. Usamos como pivote la entrada que no depende de λ (para no considerar casos $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$):

$$\left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & -2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -\lambda R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 2(1+\lambda) \end{array}\right].$$

Consideramos tres casos:

I. $1 - \lambda^2 \neq 0$, esto es, $\lambda \notin \{-1, 1\}$. En este caso podemos dividir la segunda ecuación entre $1 - \lambda^2$, y el sistema es consistente determinado:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{\lambda-1} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= -\lambda R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{2}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{\lambda-1} \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\lambda-1} \\ -\dfrac{2}{\lambda-1} \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\lambda-1} \\ -\dfrac{2}{\lambda-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\lambda-2}{\lambda-1} \\ \dfrac{2-2\lambda}{\lambda-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

II. $\lambda = 1$. En este caso el sistema es inconsistente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right],$$

III. $\lambda = -1$. En este caso sólo se queda una ecuación, el sistema es consistente indeterminado, y la solución general es

$$x = \begin{bmatrix} -2 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación (con $x_2 = 1$):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

$\square$

Ejercicios

Resolver sistemas de ecuaciones lineales para todo valor del parámetro λ:

5. $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + \lambda x_2 = -6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \lambda x_1 - 9x_2 = 6; \\ -x_1 + \lambda x_2 = -2. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$