Sistemas de ecuaciones lineales. Introducción

1. Ejemplo. Como un ejemplo, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3x_2 & = & 11; \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & -7. \end{array}\right. \tag{1}$$

El objetivo consiste en encontrar un par ordenado de números reales

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que convierta ambas ecuaciones del sistema en igualdades verdaderas.

Hay muchos métodos para resolver sistemas de este tipo. Nosotros vamos a usar el método que se generaliza fácilmente a sistemas de gran tamaño y que se llama *eliminación de Gauss-Jordan*.

Vamos a eliminar la variable x_1 en la segunda ecuación. A la segunda ecuación le sumamos la primera ecuación multiplicada por (-4). En otras palabras, de la segunda ecuación restamos la primera multiplicada por 4. Nótese que la primera ecuación no se cambia.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3x_2 & = & 11; \\ & & 17x_2 & = & -51. \end{array}\right.$$

Dividimos la segunda ecuación entre 17 para hallar x_2:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3x_2 & = & 11; \\ & & x_2 & = & -3. \end{array}\right.$$

Ahora podemos eliminar x_2 en la primera ecuación. A la primera ecuación le sumamos la segunda multiplicada por 3:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 2; \\ & & x_2 & = & -3. \end{array}\right.$$

La solución del sistema es el par de números

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2 & + & 9 & = & 11; & \checkmark \\ 8 & - & 15 & = & -7. & \checkmark \end{array}$$

2. Solución en forma matricial. Consideremos el mismo ejemplo, pero ahora escribimos los cálculos en forma matricial. Por la definición de igualdad de vectores aritméticos, el sistema (1) es equivalente a la siguiente igualdad de dos vectores:

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

El vector columna en el lado izquierdo de la igualdad se puede escribir como el producto de una matriz constante por el vector de las incógnitas, y el sistema de ecuaciones lineales (1) es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Es suficiente con escribir sólo los coeficientes en la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 11 \\ 4 & 5 & -7 \end{array}\right].$$

Se usa la siguiente terminología:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$ es la *matriz del sistema de ecuaciones lineales*;

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$ es la *matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales*.

Para resolver el sistema, hagamos las mismas operaciones que en el ejemplo anterior, pero ahora en forma matricial. Primero, a la segunda ecuación le sumamos la primera multiplicada por -4. En forma matricial, a la segunda fila de la matriz aumentada le sumamos la primera fila multiplicada por -4. Esto se denota como $R_2 \coloneqq R_2 + (-4)R_1$ o simplemente $R_2 -= 4R_1$. Luego, dividimos la segunda ecuación entre -17. En forma matricial, dividimos la segunda fila entre -17. Notación: $R_2 \coloneqq -\frac{1}{17}R_2$ o brevemente $R_2 /= -17$. Continuando de manera similar escribimos el proceso de eliminación de Gauss-Jordan en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 11 \\ 4 & 5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 -= 4R_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 17 & -51 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= -\frac{1}{17}}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 += 3R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

La solución es el vector

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

La comprobación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 \\ 8-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

3. Ejemplo. Consideremos otro sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7; \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -12; \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}\right.$$

Notemos que el coeficiente de la variable en la primera ecuación es 3, y en la segunda ecuación es 1. Es más cómodo eliminar x_1 en la primera y en la tercera ecuación. Por eso en el primer paso intercambiamos la primera ecuación con la segunda. Vamos a escribir todo en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -12 \\ -4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -12 \\ 3 & 1 & -3 & 7 \\ -4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= 4R_1]{R_2 \mathrel{-}= 3R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -12 \\ 0 & 7 & -9 & 43 \\ 0 & -5 & 10 & -45 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= -\frac{1}{5}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -12 \\ 0 & 7 & -9 & 43 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & -9 & 43 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{-}= 7R_2]{R_1 \mathrel{+}= 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= \frac{1}{5}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mathrel{+}= 2R_3]{R_1 \mathrel{+}= 2R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+1+12 \\ -2-2-8 \\ 8+3-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

4. Tres situaciones posibles. En todos los ejemplos que hemos considerado hasta ahora el sistema de ecuaciones tiene una solución. En general, hay tres situaciones posibles, aún en el caso de una ecuación con una variable:

1. $5x = 7$. Hay una solución única. Se dice que el sistema de ecuaciones es *consistente determinado.*

2. $0x = 3$. No hay solución. Se dice que el sistema es *inconsistente.*

3. $0x = 0$. Hay más de una solución. Se dice que el sistema es *consistente indeterminado.*

5. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales (use la forma matricial) y haga la comprobación:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 = -19; \\ 3x_1 - 2x_2 = 18. \end{cases}$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

6. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales dada en forma matricial y haga la comprobación:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.