Análisis y solución de un sistema de ecuaciones lineales en el caso general

1. Algoritmo de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

- Usando operaciones elementales transformar la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada reducida.
- Si en algún paso del algoritmo en la matriz del sistema surge un renglón cero, y el término independiente que corresponde a este renglón es distinto de cero, entonces el sistema es incompatible (= *inconsistente*), es decir, no tiene ninguna solución.
- En otro caso el sistema es *compatible* (= *consistente*), es decir, tiene por lo menos una solución. Si además el número de pivotes r coincide con el número de incógnitas n, el sistema es compatible determinado (tiene una única solución). Cuando el número de pivotes es menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado (tiene más de una solución), y la solución general depende de $n - r$ parámetros.

2. Observación. Para determinar si el sistema es compatible o no, no es necesario transformar la matriz aumentada del sistema en una matriz escalonada reducida. Es suficiente transformarla en una matriz escalonada.

3. Ejemplo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -5; \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 2; \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1; \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 3. \end{array}\right.$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -R_1]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= R_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{*}= -1 \\ R_4 \mathrel{*}= \frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \mathrel{+}= 3R_2 \\ R_3 \mathrel{+}= R_2 \\ R_4 \mathrel{+}= -R_2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= -1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \mathrel{+}= 8R_3 \\ R_2 \mathrel{+}= 3R_3 \\ R_4 \mathrel{+}= -R_3}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Apareció una ecuación de tipo "$0 = 1$".
Respuesta: el sistema es inconsistente (en otras palabras, el conjunto solución es vacío). □

4. Ejemplo.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -5; \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Solución. Usando operaciones elementales de filas, transformamos la matriz aumentada del sistema en una matriz escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -R_1]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= R_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{*}= -1 \\ R_4 \mathrel{*}= \frac{1}{2}}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -R_2]{\substack{R_1 \mathrel{+}= 3R_2 \\ R_3 \mathrel{+}= R_2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= -1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -R_3]{\substack{R_1 \mathrel{+}= 8R_3 \\ R_2 \mathrel{+}= 3R_3}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

No hay ecuaciones de tipo "$0 = 1$", $r = 3 = n$, tampoco hay variables libres. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado.

Respuesta: $x = \left[3, 2, -2\right]^\top$. Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 6 - 2 \\ -6 + 10 - 2 \\ -3 + 4 - 2 \\ 3 - 2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

5. Ejemplo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -2; \\ -2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 7; \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 5x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

Solución. Con operaciones elementales por filas transformamos la matriz aumentada en una matriz escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & 9 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -R_1]{R_2 \mathrel{+}= 2R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= \frac{1}{7}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -7R_2]{R_1 \mathrel{+}= -2R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -17/7 & -20/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz tiene forma escalonada reducida. $r = 2$, $n = 4$, $r < n$. Por eso el sistema es compatible indeterminado. Despejamos x_1 y x_3 a través de x_2 y x_4:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -\frac{20}{7} + 3x_2 + \frac{17}{7}x_4; \\ x_3 & = & \frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_4. \end{array}\right.$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{20}{7} + 3x_2 + \frac{17}{7}x_4 \\ x_2 \\ \frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular (con $x_2 = -1$, $x_4 = 2$):

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación para esta solución particular:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3+2-6 \\ 2-6+3+8 \\ -1+3+9-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

6. Ejercicios. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales dados por sus matrices aumentadas:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & -6 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & -2 & 10 \\ 5 & 6 & 11 & -7 \\ 4 & 5 & 5 & -2 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & 4 & 19 \\ -3 & 2 & 7 & 0 & 9 \\ 5 & -1 & -4 & 4 & 10 \\ 7 & 0 & -1 & 8 & 29 \end{array}\right].$$