Matrices simétricas y antisimétricas

Ejercicios

Objetivos. Definir matrices simétricas y antisimétricas, estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matriz transpuesta, propiedades de la matriz transpuesta, operaciones con matrices.

Matriz transpuesta (repaso)

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$. Entonces $A^\top = \begin{bmatrix} \quad 7 \quad & \quad 4 \quad \\ & \end{bmatrix}$.

Hablando de manera informal, los renglones de $A^\top$ son las $\underbrace{\hspace{8em}}_{?}$ de A,

y las $\underbrace{\hspace{8em}}_{?}$ de $A^\top$ son los $\underbrace{\hspace{8em}}_{?}$ de A.

Escriba la entrada $(1,2)$ de la matriz $A^\top$ y encuentre el mismo número en la matriz A:

$$\left(A^\top\right)_{1,2} = \underbrace{\hspace{2em}}_{?} = \underbrace{\hspace{2em}}_{A_{?,?}}.$$

En general, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $A^\top \in \underbrace{\hspace{5em}}_{?}$, y

$$\left(A^\top\right)_{i,j} = \underbrace{\hspace{2em}}_{A_{?,?}}$$

para cada par de índices $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, \underbrace{\hspace{2em}}_{?}\}$.

Propiedades algebraicas de la transposición de matrices (repaso)

Recordemos algunas propiedades de la operación que convierte A en $A^\top$.

2. Propiedad involutiva de la transposición de matrices.

Para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad \left(A^\top\right)^\top = \underbrace{\qquad}_{?}.$

3. Transposición de matrices y operaciones lineales.
Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(A+B)^\top = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad (\lambda A)^\top = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

4. Matriz transpuesta del producto de dos matrices.
Para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$,
la matriz $(AB)^\top$ se expresa a través de las matrices $A^\top$ y $B^\top$ de la siguiente manera:

$$(AB)^\top = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{1}$$

5. Ejemplo. Sean $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$

Primero calculamos el lado izquierdo de la fórmula (1):

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} \quad 8-3 \quad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 5 & \qquad & \qquad \\ & & \end{bmatrix},$$

Ahora calculamos el lado derecho de la fórmula (1):

Matrices simétricas

6. Definición (matriz simétrica). Una matriz A se llama *simétrica* si coincide con su transpuesta:

$$A^\top = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

7. Ejemplos. Están dadas dos matrices A y B de tamaño 3×3. Escriba $A^\top$ y determine si A es simétrica. Haga la misma tarea para la matriz B, luego para la matriz C.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A^\top = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right],$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^\top =$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C^\top =$$

8. Matrices no cuadradas no pueden ser simétricas.
Sea A es una matriz real de tamaño $m \times n$. Entonces $A^\top$ es de tamaño $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

Si $A = A^\top$, entonces obligatoriamente $m = \underbrace{\qquad}_{?}$.

Por eso muchos autores dan la definición de matriz simétrica suponiendo desde el inicio que la matriz es cuadrada.

9. Ecuaciones que deben satisfacer las entradas de una matriz simétrica 3 × 3. Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con entradas generales. Escriba en forma explícita la matriz A y su transpuesta (llenue todas las entradas):

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \\ \hline A_{2,1} & & \\ \hline & & \end{array}\right], \qquad A^\top = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & A_{2,1} & \\ \hline A_{1,2} & & \\ \hline & & \end{array}\right].$$

Igualando A con $A^\top$ obtenemos 9 ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} A_{1,1} = A_{1,1} & A_{1,2} = A_{2,1} & A_{1,3} = \\ A_{2,1} = & \qquad = & \qquad = \\ \qquad = & \qquad = & \qquad = \end{array} .$$

De estas 9 ecuaciones hay 3 ecuaciones triviales que se cumplen siempre (para cualquier matriz A):

$$A_{1,1} = A_{1,1}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Estas tres ecuaciones triviales se pueden omitir. Las demás 6 ecuaciones se parten en 3 pares, donde las ecuaciones dentro de cada par son equivalentes entre si. Por consecuencia, al final obtenemos sólo tres ecuaciones:

$$\underbrace{\qquad\quad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}. \tag{2}$$

Resumen: una matriz A de tamaño 3×3 es simétrica si y sólo si sus entradas satisfacen las ecuaciones (2).

10. Indique con flechas las entradas que deben ser iguales entre sí para satisfacer (2):

$$\begin{tikzcd} \boxed{A_{1,1}} & \boxed{A_{1,2}} & \boxed{A_{1,3}} \arrow[ddll, leftrightarrow, bend right] \\ \boxed{A_{2,1}} & \boxed{A_{2,2}} & \boxed{A_{2,3}} \\ \boxed{A_{3,1}} & \boxed{A_{3,2}} & \boxed{A_{3,3}} \end{tikzcd}$$

11. Ejemplo. Encuentre una matriz simétrica A si algunas de sus entradas están dadas:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} 7 & & -1 \\ \hline 6 & -5 & \\ \hline & 8 & 0 \end{array}\right].$$

12. Entradas libres y dependientes de una matriz simétrica 3 × 3. Escriba otra vez las tres ecuaciones (2) que deben satisfacer las entradas de una matriz simétrica 3×3:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Como muestra el Ejemplo 11, si están dados algunos valores de $A_{1,1}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{3,2}, A_{3,3}$, entonces los valores de otras tres variables se determinan de manera única. Esto significa que las variables $A_{1,1}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{3,2}, A_{3,3}$ se pueden tratar como *libres*, y las tres demás como *dependientes*:

$$\underbrace{A_{1,2}}_{\text{dependiente}} = \underbrace{A_{2,1}}_{\text{dependiente}}, \qquad \underbrace{A_{2,3}}_{\text{dependiente}} = \underbrace{\qquad\quad}_{\text{libre}}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{\text{dependiente}} = \underbrace{\qquad\quad}_{\text{libre}},$$

Las entradas libres y dependientes se pueden elegir de otras maneras.

13. Elección natural de entradas libres y dependientes en una matriz simétrica 3×3. Otra vez recordamos las tres ecuaciones (2) que deben satisfacer las entradas de una matriz simétrica 3×3:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{3}$$

Vamos a recorrer las entradas de A en el orden natural, por renglones, esto es, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A_{1,1}} \arrow[r] & \boxed{A_{1,2}} \arrow[r] & \boxed{A_{1,3}} \arrow[dll] \\
\boxed{A_{2,1}} \arrow[r] & \boxed{A_{2,2}} \arrow[r] & \boxed{A_{2,3}} \arrow[dll] \\
\boxed{A_{3,1}} \arrow[r] & \boxed{A_{3,2}} \arrow[r] & \boxed{A_{3,3}}
\end{tikzcd}$$

Asignamos las entradas libres y dependientes de la siguiente manera:

- $A_{1,1}$ no aparece en ecuaciones (3), por eso es libre.
- $A_{1,2}$ aparece sólo en la ecuación $A_{1,2} = A_{2,1}$; tratamos $A_{1,2}$ como libre.
- $A_{1,3}$ aparece sólo en la ecaución $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$; tratamos $A_{1,3}$ como libre.
- $A_{2,1}$ aparece en la ecuación $A_{1,2} = A_{2,1}$, donde ya elegimos una entrada libre. Entonces $A_{3,1}$ es dependiente.
- $A_{2,2}$
- $A_{2,3}$
- $A_{3,1}$
- $A_{3,2}$
- $A_{3,3}$

Resumen: tratamos como libres las variables $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, $A_{3,3}$;
entonces las variables dependientes son

$$\underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{?}. \tag{4}$$

14. Ejercicio (número máximo de entradas diferentes de una matriz simétrica). ¿Cuántas entradas diferentes entre si puede tener una matriz real simétrica de orden 3?

15. Ejercicio. Muestre que cada matriz real simétrica 2×2 es una combinación lineal de las siguientes tres matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución. Sea A una matriz simétrica. Entonces $A_{2,1} = \underbrace{\qquad}_{?}$, y

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ & A_{2,2} \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

16. Muestre que cada matriz real simétrica 3×3 es una combinación lineal de las siguientes seis matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrices antisimétricas

17. Definición (matriz antisimétrica). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *antisimétrica* si es opuesta (es decir, inversa aditiva) a su transpuesta:

$$A^\top = -A.$$

18. Ejemplo. Para cada una de las siguientes matrices determine si esta es simétrica o no, si es antisimétrica o no.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Ejercicio. Escriba las definiciones de las matrices simétricas y antisimétricas en términos de sus entradas.

20. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica. Demuestre que todas las entradas diagonales de A son nulas.

21. Ejercicio (número máximo de entradas diferentes no nulas de una matriz real antisimétrica). ¿Cuántas entradas diferentes y no nulas puede tener una matriz real antisimétrica de orden n?.

22. Ejercicio. Demuestre que la suma y el producto por escalar de matrices simétricas también son matrices simétricas. Sugerencia: use las propiedades de la matriz transpuesta. Enuncie y demuestre la propiedad análoga para matrices antisimétricas.

23. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y al mismo tiempo antisimétrica. Demuestre que A es nula.

24. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que existe un único par de matrices (B, C) tal que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

Matrices simétricas y antisimétricas sobre el campo de dos elementos

Matrices simétricas y antisimétricas se pueden definir no sólo para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, sino también para otros campos. En campos de característica 2 (es decir, cuando $1+1=0$) la situación es un poco diferente de las situación real.

25. Ejercicio. Construya una matriz antisimétrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_2)$ con entradas diagonales no nulas. Aquí $\mathbb{F}_2$ es el campo de dos elementos.

26. Ejercicio. Construya una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$ que sea simétrica, antisimétrica y no nula.