Matrices simétricas y antisimétricas

Objetivos. Definir matrices simétricas y antisimétricas, estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matriz transpuesta, propiedades de la matriz transpuesta, operaciones con matrices.

1. Definición (matriz simétrica). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *simétrica* si coincide con su transpuesta:

$$A^\top = A.$$

2. Definición (matriz antisimétrica). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *antisimétrica* si es opuesta (es decir, inversa aditiva) a su transpuesta:

$$A^\top = -A.$$

3. Ejemplo. Para cada una de las siguientes matrices determine si esta es simétrica o no, si es antisimétrica o no.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Ejercicio. Escriba las definiciones de las matrices simétricas y antisimétricas en términos de sus entradas.

5. Ejercicio. ¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz simétrica de orden n?.

6. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica. Demuestre que todas las entradas diagonales de A son nulas.

7. Ejercicio. Construya una matriz antisimétrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_2)$ con entradas diagonales no nulas. Aquí $\mathbb{F}_2$ es el campo de dos elementos.

8. Ejercicio (número máximo de entradas diferentes de una matriz simétrica). ¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz real simétrica de orden n?.

9. Ejercicio (número máximo de entradas diferentes no nulas de una matriz real antisimétrica). ¿Cuántas entradas diferentes y no nulas puede tener una matriz real antisimétrica de orden n?.

10. Ejercicio. Demuestre que la suma y el producto por escalar de matrices simétricas también son matrices simétricas. Sugerencia: use las propiedades de la matriz transpuesta. Enuncie y demuestre la propiedad análoga para matrices antisimétricas.

11. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y al mismo tiempo antisimétrica. Demuestre que A es nula.

12. Ejercicio. Construya una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$ que sea simétrica, antisimétrica y no nula.

13. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que existe un único par de matrices (B, C) tal que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica. En otras palabras, cada matriz cuadrada se puede representar de manera única como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

14. Tarea adicional. Demuestre o refute la siguiente afirmación: el producto de cualesquiera matrices simétricas $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica.