

# Sumas con la delta de Kronecker

## Ejercicios

**Objetivos.** Conocer la función llamada *delta de Kronecker* o *símbolo de Kronecker* y aprender simplificar sumas que la contienen.

**Requisitos.** Sumas, partición de una suma.

**Definición de la delta de Kronecker.** La función  $\delta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  se define mediante la regla

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y se llama el *símbolo de Kronecker* o la *delta de Kronecker*.

**Ejemplos.**

$$\delta_{2,5} = \delta_{5,2} = 0, \quad \delta_{4,4} = 1, \quad \delta_{-3,-3} = 1, \quad \delta_{7,1} = \delta_{1,7} = 0.$$

1. Calcule:

$$\begin{array}{ccc} \delta_{3,7} = & \delta_{7,3} = & \delta_{2,2} = \\ \delta_{j,j+3} = & \delta_{s,s} = & \delta_{i,i-5} = \end{array}$$

2. Establezca una relación entre  $\delta_{i,j}$  y  $\delta_{j,i}$ .

3. Sean

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = 0, \quad b_7 = 0.$$

Expresé  $b_k$  a través del símbolo de Kronecker:

$$b_k = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} \quad (k \in \{1, \dots, 7\}).$$

## Separación de un sumando en una suma

**Ejemplo.** 
$$\sum_{k=1}^{10} x_k = \sum_{k=1}^4 x_k + x_5 + \sum_{k=6}^{10} x_k.$$

4. 
$$\sum_{k=1}^{10} x_k = \quad + x_3 +$$

**Ejemplo.** 
$$\sum_{k=1}^{10} x_k = x_5 + \sum_{\substack{k: 1 \leq k \leq 10 \\ k \neq 5}} x_k.$$

5. 
$$\sum_{k=1}^{10} x_k = x_3 +$$

**Ejemplo.** Supóngase que  $a_7 = -3$  y  $a_k = 5$  para todo  $k \neq 7$ . Entonces

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \underbrace{a_7}_{-3} + \sum_{\substack{k: 1 \leq k \leq 15 \\ k \neq 7}} \underbrace{a_k}_{5} = -3 + 14 \cdot 5 = 67.$$

6. Supóngase que  $x_4 = 7$  y  $x_k = 2$  para todo  $k \neq 4$ . Calcule la suma:

$$\sum_{k=1}^{10} x_k =$$

## Sumas con la delta de Kronecker, ejemplos

**Ejemplo.** Escribamos la siguiente suma en forma explícita y calculamos su valor:

$$\sum_{k=1}^4 \tan(k) \delta_{k,3} = \tan(1) \underbrace{\delta_{1,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \tan(2) \underbrace{\delta_{2,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \tan(3) \underbrace{\delta_{3,3}}_{\substack{\parallel \\ 1}} + \tan(4) \underbrace{\delta_{4,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \tan(3).$$

7. Escriba la siguiente suma de manera explícita (como 5 sumandos) y calcule su valor:

$$\sum_{k=1}^5 2^k \delta_{k,3} =$$

Calcule las siguientes sumas:

$$8. \sum_{k=1}^4 k^2 \delta_{k,3} =$$

$$9. \sum_{j=1}^5 \cos(j) \cdot \delta_{j,2} =$$

$$10. \sum_{j=1}^4 \frac{\delta_{j,7}}{j} =$$

$$11. \sum_{k=1}^5 \ln(k) \cdot \delta_{k,2} =$$

$$12. \sum_{k=1}^5 \operatorname{sen}(k) \cdot \delta_{k,9} =$$

$$13. \sum_{k=1}^5 2^k \cdot \delta_{k,-3} =$$

## Sumas con la delta de Kronecker, reglas generales

14. Sea  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k \delta_{k,j} =$$

15. Sea  $j \notin \{1, \dots, n\}$ . Entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k \delta_{k,j} =$$

16. Resumen. 
$$\sum_{k=1}^n a_k \delta_{k,j} = \begin{cases} \phantom{a_j}, & \text{si} \\ a_j, & \text{si} \end{cases}$$

## Ejercicios adicionales

17. Calcule la suma:

$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k} \delta_{k,j} =$$

18. Sean  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{Z}$ ,  $\{a_k\}_{k \in S}$  una familia de números y  $p \in \mathbb{Z}$ . Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k \in S} a_k \delta_{k,p} =$$