Sumas con la delta de Kronecker

Objetivos. Conocer la función llamada *delta de Kronecker* o *símbolo de Kronecker* y demostrar su propiedad principal (simplificación de sumas con la delta de Kronecker).

Requisitos. Sumas, partición de una suma, separación de un sumando en una suma.

Definición de la delta de Kronecker. La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ se define mediante la regla

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y se llama el *símbolo de Kronecker* o la *delta de Kronecker*.

1. Ejemplos. $\delta_{3,7} = \delta_{7,3} = 0$, $\delta_{4,4} = 1$.

2. Observación. Para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, $\quad \delta_{i,j} = \delta_{j,i}$.

3. Ejercicio. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Calcule la integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx.$$

4. Separación de un sumando en una suma, ejemplo.

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_5) = a_4 + \sum_{i\in\{1,2,3,5\}} a_i.$$

5. Separación de un sumando en una suma, forma general.
Sea $p \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_p + \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\}} a_i.$$

Simplificación de sumas con la delta de Kronecker

6. Ejemplo. $$\sum_{i=1}^{4} \delta_{i,3} a_i = \underbrace{\delta_{1,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_1 + \underbrace{\delta_{2,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_2 + \underbrace{\delta_{3,3}}_{\substack{\parallel \\ 1}} a_3 + \underbrace{\delta_{4,3}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_4 = a_3.$$

7. Ejemplo. $$\sum_{i=1}^{4} \delta_{i,7} a_i = \underbrace{\delta_{1,7}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_1 + \underbrace{\delta_{2,7}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_2 + \underbrace{\delta_{3,7}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_3 + \underbrace{\delta_{4,7}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_4 = 0.$$

8. Proposición (simplificación de sumas con la delta de Kronecker).

1. Si $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} a_i = a_j.$$

2. Si $j \notin \{1, \ldots, n\}$, entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} a_i = 0.$$

Demostración. 1. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces separamos el sumando con el índice $i = j$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} a_i = \underbrace{\delta_{j,j}}_{\substack{\parallel \\ 1}} a_j + \sum_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} \underbrace{\delta_{i,j}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_i = a_j.$$

2. Sea $j \notin \{1, \ldots, n\}$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $i \neq j$, por lo tanto $\delta_{i,j} = 0$, así que todos los sumandos son cero. $\square$

9. Ejercicio. Calcule la suma:
$$\sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k} \delta_{k,j}.$$