Sumas y sus propiedades básicas

Ejercicios

Notación. El símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ se usa para denotar la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Definición formal inductiva (solamente para conocerla; no vamos a trabajar con esta definición). Formalmente, el símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ se puede definir por inducción:

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.$$

Escriba las siguientes sumas en forma explícita:

Ejemplo. $\sum_{i=1}^{7} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7.$

1. $\sum_{i=1}^{4} 2^i =$

2. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} =$

3. Sea $q \in \mathbb{R}$. Escriba la siguiente suma de manera explícita y simplifique el resultado:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{3} q^k = (1-q)\big(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}\big) =$$

4. Escriba la siguiente suma de manera explícita y simplifique el resultado (aquí el sumando es constante, es decir, no depende de k):

$$\sum_{k=1}^{4} 7 \; =$$

La variable de sumatoria es una variable "muda"

5. Escriba de manera explícita las siguientes sumas:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} =$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} =$$

¿Aparece alguna de las variables j o k en la respuesta?.

La variable de sumatoria es una variable "muda".

En la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ la variable i se llama *variable de la sumatoria* o *índice de la sumatoria.*

Esta variable es *muda*, esto es, el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i$ no depende de i.

La variable i se puede cambiar de nombre:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Cambie la variable de la sumatoria:

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} c_i = \sum_{k=}$

7. Consideremos la suma

$$\sum_{k=1}^{m} a_k.$$

¿De qué depende el valor de la suma?. Elija las respuestas correctas:

- ☐ Del número m (que en este ejemplo es igual al número de los sumandos).
- ☐ De la variable k.
- ☐ De los valores de $a_1, \ldots, a_m$.

Partición de una suma

Ejemplo. $$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) = \sum_{k=1}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{5} a_k.$$

8. $$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{8} a_k = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \sum_{k=5}^{8} a_k.$$

Ejemplo.

$$\sum_{k=1}^{6} a_k \;=\; a_3 + \sum_{\substack{k:\ 1\leqslant k\leqslant 6 \\ k\neq 3}} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k \;+\; a_3 \;+\; \sum_{k=4}^{6} a_k.$$

9. $$\sum_{k=1}^{10} x_k = x_7 + \quad \sum \qquad = \sum \qquad + \qquad + \sum \qquad .$$

Sumas dobles

Ejemplo.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} \lambda_{i,j} &= \sum_{j=1}^{2} \lambda_{1,j} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{2,j} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{3,j} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{4,j} \\ &= (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2}) + (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,2}) + (\lambda_{3,1} + \lambda_{3,2}) + (\lambda_{4,1} + \lambda_{4,2}).\end{aligned}$$

10. Escriba en forma extensa:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \beta_{k,j} &= \Bigg(\sum_{j=1}^{3} \qquad\qquad\Bigg) + \Bigg(\sum_{j=1}^{3} \qquad\qquad\Bigg) + \Bigg(\sum_{j=1}^{3} \qquad\qquad\Bigg) \\ &= \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg) + \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg) + \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg).\end{aligned}$$

Propiedades básicas de las sumas

En los ejercicios de esta sección suponemos que los sumandos a_i, b_i, $\ldots$ son números reales o elementos de algún campo.

11. Escriba las siguientes expresiones en forma explícita. Determine si estas son iguales o no necesariamente.

$$\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i =$$

12. Escriba las siguientes expresiones en forma explícita. Determine si estas son iguales o no necesariamente.

$$\lambda \sum_{i=1}^{3} a_i =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda a_i =$$

13. Escriba las siguientes expresiones en forma explícita. Determine si estas son iguales o no necesariamente.

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{i,j} \right) =$$

14. Basándose en tres ejercicios anteriores escriba tres leyes generales.

Sumas sobre conjuntos finitos de índices

Ejemplo.

$$\sum_{j\in\{2,5,7,8,12\}} a_j = a_2 + a_5 + a_7 + a_8 + a_{12}.$$

15. Calcule la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{k\in\{2,3,6\}} \frac{1}{k} =$

16. Escriba la siguiente suma de manera explícita:

$$\sum_{k\in\{1,4,5,7,10,11\}} a_k =$$

17. Escriba la siguiente suma en forma breve usando la notación $\sum$:

$$b_3 + b_5 + b_6 + b_9 + b_{10} + b_{12} =$$

Ejemplo. A veces es cómodo describir el conjunto de índices por medio de ciertas condiciones.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant k\leqslant 10\\ k \text{ es primo}}} a_k = \sum_{k\in\{2,3,5,7\}} a_k = a_2 + a_3 + a_5 + a_7.$$

Ejemplo. Por lo común la condición $k \in \mathbb{Z}$ se omite:

$$\sum_{3\leqslant k<6} a_k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ 3\leqslant k<6}} a_k = \sum_{k\in\{3,4,5\}} a_k = a_3 + a_4 + a_5.$$

18. Escriba la siguiente suma de manera explícita (aquí la notación $k \mid 10$ significa que k divide a 10):

$$\sum_{k>0,\ k\,|\,10} a_k =$$

Partición de una suma

19. Consideremos los siguientes tres conjuntos de números enteros:

$$A = \{2, 4, 9\}, \qquad B = \{1, 5\}, \qquad C = \{1, 2, 4, 5, 9\}.$$

Calcule la unión y la intersección de A y B:

$$A \cup B \;=\; \Big\{ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} \Big\} \;=\; \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad\qquad A \cap B \;=\; \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Escriba de manera explícita las siguientes sumas:

$$\sum_{i \in A} x_i = \qquad\qquad\qquad\qquad \sum_{i \in B} x_i =$$

$$\sum_{i \in C} x_i =$$

Encuentre una relación entre las tres sumas:

$$=$$

20. Partición de una suma, regla general. Sean A, B, C algunos conjuntos finitos de números enteros tales que

$$A \cup B = \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad A \cap B = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Entonces

$$\sum_{i \in C} x_i =$$

21. Haga la partición de la suma:

$$\sum_{k=1}^{7} a_k \;=\; \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 7 \\ k \text{ es impar}}} a_k \;+\; \sum \qquad\qquad = \big(a_1 + a_3 + a_5 + a_7\big) \;+\; \big(\qquad\qquad\qquad \big).$$