Suma de subconjuntos de un espacio vectorial

Objetivos. Definir la suma de subconjuntos de un espacio vectorial, conocer algunos ejemplos.

Requisitos. Espacio vectorial.

1. Definición (suma de subconjuntos de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean A, B subconjuntos de V. La *suma* de A y B se define de la siguiente manera:

$$A + B = \big\{ v \in V : \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad v = a + b \big\}.$$

En otras palabras, $A + B$ consiste en todos los vectores que se pueden representar en forma $a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$.

2. Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}$ y sean

$$A = \{10, 50\}, \qquad B = \{3, 4, 5\}.$$

Entonces

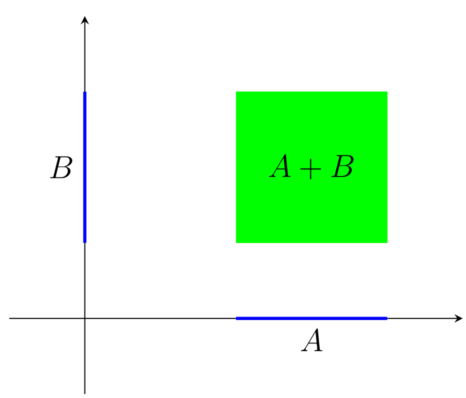
$$A + B = \{13, 14, 15, 53, 54, 55\}.$$

3. Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : \ x \in [2, 4] \right\}, \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : \ y \in [1, 3] \right\}.$$

Entonces

$$A + B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \ x \in [2, 4], \ y \in [1, 3] \right\}.$$



Ejercicios

Haga dibujos y calcule $A+B$:

4. $V=\mathbb{R}$,

$$A=B=\{-5,5\}.$$

Observe que en este ejemplo $A+A\neq 2A$.

5. $V=\mathbb{R}^2$,

$$A=\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\},\qquad B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}:\ x^2+y^2<1\right\}.$$

6. $V=\mathbb{R}^2$,

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\2\end{bmatrix}:\ x\in[1,4]\right\},\qquad B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}:\ x^2+y^2<1\right\}.$$

7. $V^2=\mathbb{R}^2$,

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}:\ x\in\mathbb{R}\right\},\qquad B=\left\{\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}:\ y\in\mathbb{R}\right\}.$$