Construcción de bases en la suma y la intersección de subespacios (ejemplo)

Objetivos. Aprender a construir bases en $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$, donde S_1 y S_2 están dados como subespacios generados por ciertos vectores del espacio $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Suma e intersección de subespacios, sublista básica de una lista de vectores, eliminación de Gauss, matrices pseudoescalonadas reducidas, rango de una matriz, construcción de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sería el subespacio $\ell(a_1, \ldots, a_k)$ con vectores $a_1, \ldots, a_k$ dados.

1. Dos descripciones de un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Todo subespacio S del espacio $\mathbb{R}^n$ se puede describir de dos maneras:

(1) Como el subespacio generado por algunos vectores $a_1, \ldots, a_m$. Estos vectores no se determinan de manera única, pero si son linealmente independientes, entonces $m = \dim(S)$.

(2) Como el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. La matriz del sistema no se determina de manera única, pero si la matriz es pseudoescalonada y tiene r renglones no nulos, entonces $r = \dim(S)$.

2. Descripción de la suma de dos subespacios dados por sus generadores. Sean $S_1 = \ell(a_1, \ldots, a_p)$ y $S_2 = \ell(b_1, \ldots, b_q)$. Entonces

$$S_1 + S_2 = \ell(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

3. Descripción de la intersección de dos subespacios dados como conjuntos soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^5$ dados de la siguiente manera:

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \colon\ 3x_1 - 2x_3 + x4 + 4x_5 = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 6 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & + & 2x_5 & = & -1 \end{array} \right\}.$$

Describir $S_1 \cap S_2$ de alguna manera.

Respuesta: Un vector $x \in \mathbb{R}^5$ pertenece a $S_1 \cap S_2$ si, y sólo si, satisface todas las ecuaciones que definen S_1 y S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 6 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & + & 2x_5 & = & -1 \end{array} \right\}.$$

4. Ejemplo. Se consideran los vectores $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^4$ y los subespacios $S_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $S_2 = \ell(b_1, b_2)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Construir una base del subespacio $S_1 + S_2$. Escribir los vectores a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 como combinaciones lineales de los vectores de esta base. Hacer las comprobaciones.

Solución. Sabemos que $S_1+S_2 = \ell(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$, por eso vamos a construir una sublista básica de la lista $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ y así obtendremos una base de $S_1 + S_2$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 1 \\ -4 & -5 & -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 2R_1]{R_3 += -3R_1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & -8 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3/2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -8 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 += 4R_2 \\ R_4 += -2R_2}]{R_1 += -3R_2} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 *= -1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 += -R_3]{R_1 += R_3} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Respuesta: $\dim(S_1 + S_2) = 3$; los vectores a_1, b_1, b_2 forman una base de $S_1 + S_2$;

$$a_2 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1, \qquad a_3 = 2a_1 - b_1.$$

Comprobación:

$$\frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1 = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 15/2 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} = a_2; \quad \checkmark$$

$$2a_1 - b_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix} = a_3. \quad \checkmark$$

□

5. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_1 del ejemplo 4. Hacer las comprobaciones. Calcular $\dim(S_1)$.

Solución. Un vector $x \in \mathbb{R}^4$ pertenece a S_1 si, y sólo si, el siguiente sistema de ecuaciones es consistente.

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 4 & 5 & x_1 \\ 2 & 3 & 4 & x_2 \\ 5 & 6 & 7 & x_3 \\ -4 & -5 & -6 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 += -R_2} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & x_1 - x_2 \\ 2 & 3 & 4 & x_2 \\ 5 & 6 & 7 & x_3 \\ -4 & -5 & -6 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 += 4R_1]{\substack{R_2 += -2R_1 \\ R_3 += -5R_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 2 & -2x_1 + 3x_2 \\ 0 & 1 & 2 & -5x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 0 & -1 & -2 & 4x_1 - 4x_2 + x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 += R_2]{R_3 += -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 2 & -2x_1 + 3x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

La matriz obtenida es escalonada reducida (sería suficiente con pseudoescalonada reducida), por eso el sistema tiene solución si, y sólo si, en todas las ecuaciones de la forma $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \beta$ la expresión β es cero. Además vemos que $\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3) = 2$, así que $\dim(S_1) = 2$.

Respuesta: $\dim(S_1) = 2$,

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \colon \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Comprobación. Hay que probar que cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 satisface cada una de las ecuaciones del sistema obtenido.

$$\begin{aligned} a_1 \in S\colon \quad & -9 + 4 + 5 + 0 = 0; \quad \checkmark \\ & 6 - 2 + 0 - 4 = 0; \quad \checkmark \\[1ex] a_2 \in S\colon \quad & -12 + 6 + 6 + 0 = 0; \quad \checkmark \\ & 8 - 3 + 0 - 5 = 0; \quad \checkmark \\[1ex] a_3 \in S\colon \quad & -15 + 8 + 7 + 0 = 0; \quad \checkmark \\ & 10 - 4 + 0 - 6 = 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Podríamos escribir la comprobación de manera más breve:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 + 4 + 5 + 0 & -12 + 6 + 6 + 0 & -15 + 8 + 7 + 0 \\ 6 - 2 + 0 - 4 & 8 - 3 + 0 + 5 & 10 - 4 + 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

6. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que describa el subespacio S_2 del ejemplo 4. Hacer las comprobaciones. Calcular $\dim(S_2)$.

Solución. Este ejemplo es similar al ejemplo anterior.

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \\ -2 & -2 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= 2R_1]{R_3 \mathrel{+}= -3R_1} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & -5 & -3x_1 + x_3 \\ 0 & 2 & 2x_1 + x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -R_2]{R_3 \mathrel{+}= \frac{5}{2}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & -3x_1 + \frac{5}{2}x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

Respuesta: $\dim(S_2) = 2$,

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcrcrcrcl} -6x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} -6 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+0+6+0 & -12+10+2+0 \\ 2+0+0-2 & 4-2+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

$\square$

7. Construir una base del subespacio $S_1 \cap S_2$. Comprobar que los vectores de esta base satisfacen las ecuaciones homogéneas obtenidas en dos ejercicios anteriores. Hacer la comprobación de las dimensiones con la fórmula de Grassmann.

Solución. Un vector $x \in \mathbb{R}^4$ pertenece a $S_1 \cap S_2$ si, y sólo si, satisface al sistema que define S_1 y también al sistema que define S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ -6x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Resolvamos el sistema obtenido:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \mathrel{+}= -R_2} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= -2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \mathrel{+}= R_3]{R_1 \mathrel{+}= -2R_3} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 3x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Respuesta: $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$, una base de $S_1 \cap S_2$ consiste en el vector

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0+3+0 \\ 2+0+0-2 \\ -6+0+6+0 \\ 2+0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

8. Extender la base de $S_1 \cap S_2$ obtenida en el ejercicio anterior a una base de S_1; a una base de S_2; a una base de $S_1 + S_2$.

Solución. Recordamos que

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Como $\dim(S_1) = 2$, hay que agregar al vector u alguno de los vectores a_1, a_2, a_3 de tal manera que se obtenga una base de S_1. El vector a_1 no es un múltiplo de u, por eso (u, a_1) es una base de S_1.

2. Como $\dim(S_2) = 2$, tenemos que agregar al vector u uno de los vectores b_1, b_2 de tal manera que se obtenga una base de S_2. El vector b_1 coincide con u, y el vector b_2 no es un múltiplo de u. Por eso la respuesta es la lista (u, b_2).

3. Notemos que $S_1 + S_2 = \ell(u, a_1) + \ell(u, b_2) = \ell(u, a_1, b_2)$. Como ya sabemos que $\dim(S_1 + S_2) = 3$, los vectores u, a_1, b_2 forman una base de $S_1 + S_2$.

4. Comprobación de la fórmula de Grassmann:

$$\underbrace{\dim(S_1 + S_2)}_{3} + \underbrace{\dim(S_1 \cap S_2)}_{1} = \underbrace{\dim(S_1)}_{2} + \underbrace{\dim(S_2)}_{2}. \qquad \checkmark \qquad \square$$