Subespacios de espacios vectoriales

Objetivos. Estudiar la definición, el criterio y algunos ejemplos de subespacios vectoriales. Muchos espacios vectoriales importantes (por ejemplo, espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneas) son subespacios de otros espacios vectoriales.

Requisitos. Espacios vectoriales, ejemplos de espacios vectoriales, restricción de una función a un subconjunto del dominio.

1. Ejemplo. Consideremos el espacio vectorial $V^3(O)$. Sea Π un plano que contiene el punto O. Consideremos el conjunto $S = \{\overrightarrow{OA}\colon A \in \Pi\}$. La suma y el producto por escalares para los elementos de S definimos como para los elementos de $V^3(O)$. En este caso se dice que las operaciones lineales en S son *heredadas* (*inducidas*) de $V^3(O)$. También se dice que las operaciones lineales en S son *restricciones* de las operaciones lineales en $V^3(O)$. Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OO} \in S, && \\
&\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \in S && \forall \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in S, \\
&\lambda \overrightarrow{OA} \in S && \forall \overrightarrow{OA} \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Además, S cumple con todas las propiedades de espacio vectorial real. S es un *subespacio* del espacio vectorial $V^3(O)$.

2. Definición (subespacio vectorial). Sea $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Se dice que $(S, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un *subespacio vectorial* de V si

$$\begin{aligned}
&(S, \mathbb{K}, \oplus, \odot) \quad \text{es un espacio vectorial}, \\
&S \subset V, \\
&\mathbb{K} = \mathbb{F}, \\
&\forall a, b \in S \quad a \oplus b = a + b, \\
&\forall a \in S \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \lambda \odot a = \lambda \cdot a.
\end{aligned}$$

Esto es, S y V son espacios vectoriales sobre un mismo campo, S es un subconjunto de V y las operaciones lineales en S son restricciones de las operaciones lineales en V.

3. Observación. Por definición, *subespacio vectorial* es un *espacio vectorial*. (Compare la situación con los conceptos de *subcampeón* y *submarino*.)

4. Observación. Si $(S, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un subespacio de un espacio vectorial $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$, entonces $\mathbb{K}$ (el campo de escalares de S) debe coincidir con $\mathbb{F}$ (con el campo del espacio V) y las operaciones lineales $\oplus$ y $\odot$ en S están determinadas de manera única. Es decir, el subespacio $(S, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ está determinado completamente por el *subconjunto* S de V. Es natural investigar, cuando un *subconjunto* de V será un *subespacio vectorial* de V.

5. Teorema (criterio de subespacio vectorial). Sea $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, sea S un subconjunto de V. Denotemos por $\oplus$ y $\odot$ a las operaciones inducidas en S por las operaciones $+$ y $\cdot$:

$$\forall a, b \in S \qquad a \oplus b = a + b, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F}\ \forall a \in S \qquad \lambda \odot a = \lambda \cdot a.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(S, \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ es un subespacio vectorial de V;

(b) S contiene al vector cero del espacio V y es cerrado con respecto a las operaciones lineales del espacio V:

1. $\mathbf{0}_V \in S$;
2. $a + b \in S$ para todos $a, b \in S$;
3. $\lambda a \in S$ para todos $a \in S$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que S es un subespacio vectorial de V. Por definición, esto significa que S es un espacio vectorial, $S \subset V$ y las operaciones lineales en S son restricciones de las operaciones lineales en V. Vamos a demostrar las condiciones 1, 2, 3.

S es un espacio vectorial. Esto implica que los resultados de las operaciones $\oplus$ y $\odot$ pertenecen al mismo espacio. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\forall a, b \in S \qquad a + b = a \oplus b \in S, \\ &\forall a \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad \lambda \cdot a = \lambda \odot a \in S. \end{aligned}$$

Demostremos que $\mathbf{0}_V \in S$. Como S es un espacio vectorial, en S existe un único elemento $\mathbf{0}_S$ tal que $\mathbf{0}_S + a = a$ para todo $a \in S$. El objetivo consiste en demostrar que $\mathbf{0}_S = \mathbf{0}_V$.

El vector $\mathbf{0}_S$ es un elemento neutro bajo la suma $\oplus$, por lo tanto

$$\mathbf{0}_S \oplus \mathbf{0}_S = \mathbf{0}_S. \tag{1}$$

Pero la $a \oplus b = a + b$ para todos $a, b \in S$, en particular para $a = b = \mathbf{0}_S$. Por lo tanto podemos escribir la igualdad (1) como una igualdad en el espacio V:

$$\mathbf{0}_S + \mathbf{0}_S = \mathbf{0}_S. \tag{2}$$

Ahora vamos a aplicar la ley de cancelación en V. En otras palabras, a ambos lados de (2) sumamos b, donde b es el elemento inverso aditivo de $\mathbf{0}_S$ en el espacio V. (En realidad $b = \mathbf{0}_S = \mathbf{0}_V$, pero ahora todavía no lo podemos concluir.)

$$(\mathbf{0}_S + \mathbf{0}_S) + b = \mathbf{0}_S + b;$$

Aplicamos la ley asociativa en V:

$$\mathbf{0}_S + (\mathbf{0}_S + b) = \mathbf{0}_S + b;$$

Usamos la definición del vector b:

$$\mathbf{0}_S + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V;$$

Recordamos que $\mathbf{0}_V$ es un elemento neutro bajo la operación $+$:

$$\mathbf{0}_S = \mathbf{0}_V.$$

Resumen: $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_S \in S$.

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que S cumple con las condiciones 1, 2, 3 (esto es, contiene al vector $\mathbf{0}_V$ y es cerrado con respecto a las operaciones lineales). Las condiciones 2 y 3 significan que las restricciones de las operaciones lineales están definidas correctamente (los resultados de estas operaciones están en S). Los axiomas 1, 4, 5, 6, 7, 8 de espacio vectorial se cumplen automaticamente en S porque se cumplen en V. Por ejemplo, la igualdad $(a+b)+c = a+(b+c)$ es válida para todos $a, b, c \in V$, en particular, para todos $a, b, c \in S$. Mostremos que se cumplen los axiomas 2 y 3 en S.

2. Por la condición 1, el elemento $\mathbf{0}_V$ pertenece a S. Es fácil ver que $\mathbf{0}_V$ es elemento neutro aditivo de S: como $\mathbf{0}_V + a = a$ para todo $a \in V$, en particular, $\mathbf{0}_V + a = a$ para todo $a \in S$. (Ahora podemos considerar al vector $\mathbf{0}_V$ también como $\mathbf{0}_S$.)

3. Sea $a \in S$. Entonces por las condiciones 2 y 3 tenemos que el elemento $b = (-1) \cdot a$ pertenece a S. Chequemos que b es el elemento inverso aditivo de a (en S y en V):

$$a + b = a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_S. \qquad \square$$

Ejemplos de subespacios

6. Polinomios de grado $\le d$. $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

7. Si $p \le d$, entonces $\mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$.

8. Subespacio nulo. En cualquier espacio vectorial V, el conjunto $\{\mathbf{0}_V\}$ es un subespacio de V.

9. Cada espacio vectorial es su subespacio. V es un subespacio de V.

10. Segmentos dirigidos cuyos puntos terminales pertenecen a una recta fija. Sea $V = V^2(O)$. Sea ℓ una recta en el plano. Consideremos el conjunto

$$S = \{\overrightarrow{OA}\colon A \in \ell\}.$$

Si $O \in \ell$, entonces S es un subespacio de $V^2(O)$. Si $O \notin \ell$, entonces S no lo es.

11. Subespacios de $V^2(O)$. Comprender bien que los siguientes conjuntos son subespacios de $V^2(O)$:

- Subespacio nulo $\{\overrightarrow{OO}\}$.
- Cualquier recta que pasa por el origen.
- Todo el espacio $V^2(O)$.

Luego usando los conceptos de base y dimensión podremos ver que cualquier subespacio de $V^2(O)$ tiene una de estas formas.

12. Subespacios de $V^3(O)$. Comprender bien que los siguientes conjuntos son subespacios de $V^3(O)$:

- Subespacio nulo $\{\overrightarrow{OO}\}$.
- Cualquier recta que pasa por el origen.
- Cualquier plano que pasa por el origen.
- Todo el espacio $V^3(O)$.

13. Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & A_{1,n}x_n & = & 0; \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ A_{m,1}x_1 & + & \ldots & + & A_{m,n}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Este sistema se escribe en forma breve de la sigueinte manera:

$$Ax = \mathbf{0}.$$

Aquí $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ es la matriz del sistema, $x = [x_j]_{j=1}^n$ es el vector de las incógnitas. Denotemos por S al conjunto solución de este sistema:

$$S := \big\{x \in \mathbb{F}^n \colon Ax = \mathbf{0}\big\}.$$

Entonces S es un subespacio de $\mathbb{F}^n$.

14. Ejercicio. En el ejemplo anterior demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{F}^n$.

15. Ejemplo. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. El conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Observación: este conjunto S se puede identificar con $\mathbb{R}^m$. Esto significa que es posible considerar $\mathbb{R}^m$ como un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

16. Soluciones de una ecuacion diferencial ordinaria homogénea. Sea $\omega > 0$. Consideremos el conjunto de todas las funciones real dos veces continuamente derivables en el intervalo $[0, 1]$ que son soluciones de la EDO homogénea $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$:

$$S := \big\{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \colon \quad x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]\big\}.$$

Entonces S es un subespacio de $C^2([0, 1])$.

17. Matrices triangulares superiores. Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es *triangular superior*, si $A_{i,j} = 0$ para $i > j$. Denotemos por $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices triangulares superiores de orden n:

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) := \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \colon \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (i > j) \quad \Rightarrow \quad A_{i,j} = 0\Big\}.$$

18. Ejemplo de subconjunto que no es subespacio. El conjunto

$$S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = x_1^3\}$$

no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Mostremos que S no es cerrado con respecto al producto por escalares. De hecho, el vector

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pertenece a S, pero el vector

$$2x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

no pertenece a S pues sus componentes $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$ no cumplen con la condición $x_2 = x_1^3$.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes subconjuntos S de $\mathbb{R}^2$ determine si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ o no.

19. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 5\}$.

20. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0\}$.

21. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = c\}$, donde c es un número real fijo.

22. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 3x_1 - 5x_2 = 4\}$.

23. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 3x_1 - 5x_2 = 0\}$.

24. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 \geq 0\}$.

25. $S = \mathbb{Q}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$, esto es, el conjunto de todos los pares con componentes racionales.

26. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2\}$.

27. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| = |x_2|\}$.

28. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x_2| \le |x_2|\}$.

29. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = x_1 + 5\}$.

Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}^2$ determine si este conjunto es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$:

30. $S = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Im}(z_1)\}$.

31. $S = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)\}$.