Espectro de un operador lineal

Objetivos. Definir el espectro de un operador lineal y mostrar que en el caso de dimensión finita el espectro coincide con el conjunto de los valores propios y también con el conjunto de las raíces del polinomio característico.

Requisitos. Transformaciones lineales, operadores lineales, correspondencia entre transformaciones lineales y matrices, criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada, criterio de invertibilidad de un operador lineal, valores y vectores propios de un operador lineal, polinomio característico de un operador lineal.

Suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Valor propio y vector propio de un operador lineal (repaso). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Se dice que λ es un *valor propio* de T si existe un vector $u \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ tal que $Tu = \lambda u$. En esta situación el vector u se denomina *vector propio* correspondiente al valor propio λ.

2. Notación para $\ker(\boldsymbol{\lambda I - T})$ (repaso). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Ponemos

$$\mathrm{S}_{T,\lambda} \coloneqq \ker(\lambda I - T) = \big\{u \in V\colon\ Tu = \lambda u\big\}.$$

3. Descripción de valores propios en términos de la inyectividad de $\boldsymbol{\lambda I - T}$ (repaso). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) λ es un valor propio de T.

(b) $\mathrm{S}_{T,\lambda} \neq \{\mathbf{0}_V\}$.

(c) el operador $\lambda I - T$ no es inyectivo.

4. Polinomio característico de un operador lineal (repaso). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces el *polinomio característico* de T se define como

$$\mathrm{C}_T(\lambda) \coloneqq \det(\lambda I - T).$$

5. Definición (espectro de un operador lineal). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. El *espectro* de T denotado por $\mathrm{sp}(T)$ se define como el conjunto de todos los escalares $\lambda \in \mathbb{F}$ tales que $\lambda I - T$ no es invertible:

$$\mathrm{sp}(T) \coloneqq \big\{\lambda \in \mathbb{F}\colon \quad \lambda I - T \quad \text{no es invertible}\big\}.$$

6. Valores propios y espectro de una matriz. Cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ genera al operador lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ mediante la regla $T_A x \coloneqq Ax$. Los valores propios, vectores propios y el espectro de A se definen como los valores propios, vectores propios y el espectro de la transformación lineal T_A. El polinomio característico del operador T_A coincide con $\det(\lambda I_n - A)$.

Para establecer un criterio de valor propio, necesitamos recordar el siguiente criterio de invertibilidad de una transformación lineal.

7. Criterio de invertibilidad de una transformación lineal (repaso). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{B}$ una base de V, $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es invertible.

(b) T es inyectiva, esto es, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(c) T es suprayectiva, esto es, $\operatorname{im}(T) = V$.

(d) la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es invertible.

(e) $\det(T) \neq 0$, esto es, $\det(T_{\mathcal{B}}) \neq 0$.

8. Teorema (criterio de valor propio). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{B}$ una base de V, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$, esto es, $\lambda I - T$ no es invertible.

(b) λ es un valor propio de T, esto es, la transformación $\lambda I - T$ no es inyectiva.

(c) $\lambda I - T$ no es suprayectiva, esto es, $\operatorname{r}(\lambda I - T) < n$.

(d) la matriz $\lambda I_n - T_{\mathcal{B}}$ no es invertible.

(e) $\mathrm{C}_T(\lambda) = 0$, esto es, $\det(\lambda I_n - T_{\mathcal{B}}) = 0$.

Demostración. Aplicar el criterio de invertibilidad a la transformación $\lambda I - T$ y cambiar cada una de las condiciones por su negación. □

9. Nota. Por el criterio, $\operatorname{sp}(T)$ coincide con el conjunto de los valores propios de T y con el conjunto de las raíces del polinomio característico de T (se trata de las raíces pertenecientes al mismo campo $\mathbb{F}$).

10. Ejemplo. Calcular el polinomios característico, el espectro y los subespacios propios de la transformación $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ definida mediante su matriz en la base canónica:

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculemos el polinomio característico de T:

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \det(\lambda I_2 - T_{\mathcal{E}}) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(T_{\mathcal{E}})\lambda + \det(T_{\mathcal{E}}) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

De allí concluimos que $\mathrm{sp}(T) = \{2, 5\}$. Calculemos los subespacios propios y vectores propios correspondientes a los valores propios 2 y 5.

$\lambda = 2$. Vamos a calcular el subespacio $\mathrm{S}_{T,2} = \ker(2I - T) = \ker(T - 2I)$. Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas $(T_{\mathcal{E}} - 2I_2)x = \mathbf{0}_2$

$$T_{\mathcal{E}} - 2I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \mathrel{+}= R_1]{R_1 \mathrel{*}= \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Subespacio propio correspondiente al valor propio 2:

$$\mathrm{S}_{T,2} = \ker(2I - T) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{C} \right\} = \ell\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \ell(e_1 - e_2).$$

Una base del subespacio propio (consiste de un vector u_1):

$$u_1 = e_1 - e_2.$$

Los vectores propios asociados al valor propio 2 son de la forma αu_1, donde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Probemos que u_1 es un vector propio asociado al valor propio 2:

$$Tu_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2u_1. \quad \checkmark$$

Ahora calculemos el subespacio propio asociado al valor propio 5. Transformemos la matriz $T_{\mathcal{E}} - 5I_2$ en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$T_{\mathcal{E}} - 5I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Subespacio propio correspondiente al valor propio 5:

$$\mathrm{S}_{T,5} = \ker(5I - T) = \left\{ \begin{bmatrix} -4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \ell\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \ell(-4e_1 + e_2).$$

Una base del subespacio propio:

$$u_2 = -4e_1 + e_2.$$

Comprobación:

$$Tu_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 5 \end{bmatrix} = 5u_2. \quad \checkmark$$

□

11. Ejemplos. Calcule los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

12. Ejercicio. Calcule los valores propios de las matrices A y $B = A^\top A$, donde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = A^\top A.$$

13. Ejercicio (espectro de la matriz transpuesta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $\operatorname{sp}(A^\top) = \operatorname{sp}(A)$.

14. Tarea adicional (invertibilidad de $\boldsymbol{I_n - AB}$ y $\boldsymbol{I_n - BA}$). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $I_n - AB$ es invertible. Demuestre que $I_n - BA$ también es invertible, y

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

15. Tarea adicional (espectro de $\boldsymbol{BA}$ es igual con el espectro de $\boldsymbol{AB}$). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA).$$

Primer método: considerar por separado los casos $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$. En el caso $\lambda \neq 0$ usar el resultado de la tarea anterior sobre la invertibilidad de $I - AB$ y $I - BA$. Segundo método: aplicar la definición de valor y vector propio.