El teorema espectral para las matrices autoadjuntas

Objetivos. Demostrar que para cada matriz compleja cuadrada autoadjunta existe una base ortonormal que consiste de sus vectores propios. Vamos a dar una demostración directa, sin usar el concepto de triangulación de Schur.

Prerrequisitos. Ortogonalidad, matriz autoadjunta, subespacio invariante.

1 Definición. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Se dice que W es un subespacio invariante de A si

$$\forall w \in W \qquad Aw \in W.$$

Notación breve: $A[W] \subseteq W$.

2 Observación (repaso: el complemento ortogonal de un conjunto)**.** Dado un subconjunto X de $\mathbb{C}^n$, su complemento ortogonal se denota por $X^\perp$ y se define de la siguiente manera:

$$X^\perp \coloneqq \big\{ y \in \mathbb{C}^n\colon\ \forall x \in X \quad \langle y, x\rangle = 0 \big\}.$$

Se sabe que $X^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Más aún, si X es un subespacio vectorial de V, entonces

$$\dim(X) + \dim(X^\perp) = n.$$

3 Lema. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$. Sean $v \in V \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que*

$$Tv = \lambda v.$$

Entonces, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración.

$$\lambda \|v\|^2 = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \overline{\lambda}\|v\|^2.$$

Dividimos entre $\|v\|^2$ y obtenemos que $\overline{\lambda} = \lambda$. □

4 Lema. *Sea V un espacio con producto interno y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ tal que $A[W] \subseteq W$. Entonces, $A[W^\perp] \subseteq W^\perp$.*

Demostración. Sea $x \in W^\perp$. Queremos demostrar que $Ax \in W^\perp$. Sea $y \in W$. Como $A[W] \subseteq W$, sabemos que $Ay \in W$. Por lo tanto,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0.$$ □

5 Lema. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta. Supongamos que u_n es un vector propio normalizado de A:*

$$Au_n = \lambda_n u_n, \qquad \|u_n\| = 1.$$

Definimos $W \coloneqq \{u_n\}^\perp$. Encontramos en W una base ortonormal $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Consideremos la matriz Q que consiste de las columnas $w_1, \ldots, w_{n-1}, u_n$:

$$Q \coloneqq \begin{bmatrix} w_1, \ldots, w_{n-1}, u_n \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz Q^*AQ es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$Q^*AQ = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$. Calculemos la k-ésima columna la matriz Q^*AQ. En otras palabras, calculemos el vector Q^*AQe_k.

Primer caso: $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. En este caso, $Qe_k = w_k$, $Aw_k \in W$, por eso

$$Aw_k = \sum_{j=1}^{n-1} B_{j,k} w_j$$

con algunos coeficientes $B_{j,k}$, y

$$Q^*AQe_k = Q^*Aw_k = \begin{bmatrix} B_{1,k} \\ \vdots \\ B_{n-1,k} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo caso: $k = n$. En este caso, $Qe_k = u_n$,

$$Au_n = \lambda_n u_n,$$

y

$$Q^*AQe_n = Q^*Au_n = \lambda_n Q^*u_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Hemos mostrado que la matriz Q^*AQ tiene la forma requerida. Demostremos que B es autoadjunta. Por definición, $B_{j,k}$ es j-ésimo coeficiente de la descomposición de Aw_k en la base $w_1, \ldots, w_{n-1}, u_n$:

$$B_{j,k} = \langle Aw_k, w_j \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\overline{B_{k,j}} = \overline{\langle Aw_j, w_k \rangle} = \langle w_k, Aw_j \rangle = \langle Aw_k, w_j \rangle = B_{j,k}. \qquad \square$$

6 Teorema. *Para cada n en $\mathbb{N}$, para cada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$, existe una matriz unitaria U tal que U^*AU es una matriz diagonal.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, la afirmación es obvia.

Sea $n \geq 2$. Como el campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, el polinomio característico de A tiene un cero, y la matriz A tiene un valor y vector propio. Suponemos que u_n es un vector propio normalizado de A y λ_n es el valor propio correspondiente. Construimos Q y B con el lema anterior.

Aplicamos la hipótesis de inducción a la matriz B y encontramos una matriz unitaria R tal que

$$R^*BR = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

Construimos

$$\widetilde{R} := \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U := Q\widetilde{R}.$$

Es fácil ver que $\widetilde{R}$ y U son matrices unitarias. Más aún,

$$\begin{aligned} U^*AU = \widetilde{R}^*Q^*AQ\widetilde{R} &= \begin{bmatrix} R^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^*BR & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \end{aligned}$$

□

7 Corolario. *Para cada n en $\mathbb{N}$, para cada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$, existe una base ortonormal $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{C}^n$ cuyos elementos son vectores propios de A.*

Demostración. Usamos la notación del teorema y definimos $u_1, \ldots, u_n$ como las columnas de U. Entonces, la igualdad

$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

implica que $Au_k = \lambda_k u_k$ para cada k en $\{1, \ldots, n\}$. □