Teorema del mapeo del espectro (para funciones polinomiales y operadores lineales en espacios de dimensiones finitas)

Objetivos. Demostrar el teorema del mapeo del espectro (llamado también el teorema del mapeo espectral) para una función polinomial y un operador lineal que actúa en un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

Requisitos. Operadores lineales, espectro de un operador lineal, determinante de un operador lineal, criterio de invertibilidad de un operador lineal en términos de su determinante, determinante del producto, imagen de un conjunto bajo una función.

1. Proposición (criterio de invertibilidad del producto de operadores en un espacio de dimensión finita). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ de dimensión finita, $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{L}(V)$, $T = T_1 \cdot \cdots \cdot T_m$. Entonces

$$T_1 \cdot \cdots \cdot T_m \text{ es invertible} \quad\iff\quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad T_j \text{ es invertible.}$$

Demostración. Por la fórmula del determinante del producto,

$$\det(T) = \det(T_1) \cdot \cdots \cdot \det(T_m).$$

Ahora recordamos que un operador lineal que actúa en un espacio vectorial de dimensión finita es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero. El producto es distinto de cero si y sólo si cada uno de los múltiplos es distinto de cero. □

2. Observación. La implicación "$\Longrightarrow$" de la proposición anterior no es válida en el caso de dimensión infinita.

3. Tarea adicional (invertibilidad del producto de operadores lineales que conmutan entre sí). Demuestre el siguiente análogo de la proposición anterior que es útil en el caso de dimensión infinita. Sea V un espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita, y sean $T_1, T_2, \ldots, T_m \in \mathcal{L}(V)$ operadores lineales que conmutan entre sí: $T_i T_j = T_j T_i$ para toda $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Demuestre que

$$\text{el producto } T_1 T_2 \cdots T_m \text{ es invertible} \quad\iff\quad \text{todas } T_1, T_2, \ldots, T_m \text{ son invertibles.}$$

Indicación para la parte "$\Longrightarrow$": si el producto $T_1 T_2 \cdots T_m$ es invertible y U es su inversa, construya la inversa de T_1 usando U y $T_2, \ldots, T_m$.

Teorema del mapeo del espectro

4. Ejemplo. Antes del teorema consideremos un ejemplo que ilustra el teorema en el caso de matrices diagonales.

$$A = \operatorname{diag}(4, -1, 2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = x^2 - x + 3.$$

Calculamos $f(A)$ usando propiedades de matrices diagonales:

$$f(A) = A^2 - A + 3I = \operatorname{diag}(f(4), f(-1), f(2)) = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Comparamos los espectros de A y de $f(A)$:

$$\operatorname{sp}(A) = \{4, -1, 2\}, \qquad \operatorname{sp}(f(A)) = \{15, 5\} = \{f(4), f(-1), f(2)\}.$$

El espectro de $f(A)$ coincide con el conjunto de los valores del polinomio f en el espectro de A. Vamos a demostrar esta afirmación en el caso general.

5. Teorema (del mapeo del espectro). Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea f un polinomio con coeficientes complejos. Entonces

$$\operatorname{sp}(f(T)) = f(\operatorname{sp}(T)),$$

donde

$$f(\operatorname{sp}(T)) = \Big\{\mu \in \mathbb{C} \colon \quad \exists \lambda \in \operatorname{sp}(T) \quad \mu = f(\lambda)\Big\}.$$

Demostración. El caso cuando f es una constante es trivial (lo dejamos como un ejercicio). Consideremos el caso principal cuando $\deg(f) \geq 1$.

1. Supongamos que $\mu \in f(\operatorname{sp}(T))$ y demostremos que $\mu \in \operatorname{sp}(f(T))$. La condición $\mu \in f(\operatorname{sp}(T))$ significa que $\mu = f(\lambda)$ para algún $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. El polinomio $f(z) - \mu$ tiene raíz λ y por el teorema del resto se divide entre $z - \lambda$. Esto es, existe un polinomio q tal que

$$f(z) - \mu = (z - \lambda)q(z).$$

De allí

$$f(T) - \mu I = (T - \lambda I)q(T).$$

El operador $T - \lambda I$ no es invertible. Aplicando la proposición sobre la invertibilidad del producto concluimos que $f(T) - \mu I$ no es invertible. Lo último significa que $\mu \in \operatorname{sp}(p(T))$.

2. Supongamos que $\mu \notin f(\operatorname{sp}(T))$ y demostremos que $\mu \notin \operatorname{sp}(f(T))$. Consideremos el polinomio $f(z) - \mu$. Como el campo $\mathbb{C}$ es algebráicamente cerrado, podemos factorizar $f(z) - \mu$ en factores lineales:

$$f(z) - \mu = c_0(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_d), \tag{1}$$

donde $d = \deg(f)$ y c_0 es el coeficiente mayor de f. De la igualdad (1) sigue que $f(\lambda_j) = \mu$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Demostremos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \notin \operatorname{sp}(T)$. En efecto, si suponemos que $\lambda_j \in \operatorname{sp}(T)$ para algún $j \in \{1, \ldots, d\}$, entonces $\mu = f(\lambda_j) \in f(\operatorname{sp}(T))$ que contradice a la hipótesis. Así que $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \notin \operatorname{sp}(T)$.

Ponemos el operador T en lugar de la variable z en la igualdad (1):

$$\mu I - f(T) = -c_0(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_d I).$$

Todos los factores del lado derecho son invertibles, por eso $\mu I - f(T)$ también lo es. Lo último significa que $\mu \notin \operatorname{sp}(f(T))$. $\square$

6. Nota. La condición $\dim(V) < +\infty$ se puede omitir. Las expresiones $(T - \lambda I)$ y $q(T)$ son polinomios del mismo operador T, por eso conmutan, y se puede aplicar la generalización de la proposición sobre la invertibilidad del producto de operadores lineales.

7. Observación. La primera parte de la demostración no usa la hipótesis que el campo es algebráicamente cerrado. Por lo tanto, en el caso de cualquier campo es válida la contención

$$f(\operatorname{sp}(T)) \subset \operatorname{sp}(f(T)).$$

8. Contraejemplo real. Vamos a construir un ejemplo real tal que se cumple la contención estricta

$$f(\operatorname{sp}(T)) \subsetneq \operatorname{sp}(f(T)).$$

Consideremos el operador $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica $\mathcal{E}$ es

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de T es $\lambda^2 + 1$, por eso $\operatorname{sp}(T) = \varnothing$. Sea $f(x) = 0$, esto es, el polinomio cero. Entonces $f(T) = \mathbf{0}$ (el operador nulo), y $\operatorname{sp}(f(T)) = \{0\}$. En este caso

$$\operatorname{sp}(f(T)) = \{0\} \neq \varnothing = f(\operatorname{sp}(T)).$$

9. Ejercicio. Cheque si se cumple o no la fórmula $\operatorname{sp}(f(A)) = f(\operatorname{sp}(A))$ para el polinomio $f(x) = x^2$ y la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicaciones

10. Ejercicio (espectro de una proyección). Sea V un espacio vectorial complejo y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(P) \subset \{0, 1\}.$$

11. Tarea adicional (espectro de una proyección no trivial). Sea V un espacio vectorial complejo y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$, $P \neq \mathbf{0}$, $P \neq I$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(P) = \{0, 1\}.$$

12. Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = I$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(T) \subset \{-1, 1\}.$$

13. Ejercicio (espectro de un operador lineal nilpotente). Sea V un espacio vectorial complejo y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^m = \mathbf{0}$ para algún $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(T) = \{0\}.$$

Resultados similares

Los siguientes resultados parecen al teorema del mapeo del espectro, pero no se pueden obtener como sus corolarios (explique, por qué).

14. Ejercicio. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(\alpha T + \beta I) = \alpha \operatorname{sp}(T) + \beta.$$

15. Ejercicio. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal invertible, $\operatorname{sp}(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Demuestre que

$$\operatorname{sp}(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k} \right\}.$$

Generalizaciones

16. Nota. Es posible definir $f(T)$ no sólo en el caso cuando f es un polinomio sino también en el caso cuando f es una función holomorfa en una vecindad del conjunto $\operatorname{sp}(T)$. Cuando T es un operador autoadjunto o normal de un espacio vectorial complejo con producto interno, es posible definir $f(T)$ para todas las funciones continuas en $\operatorname{sp}(T)$. El teorema del mapeo del espectro es válida en todos estos casos.