Espacios vectoriales reales con producto interno

Objetivos. Estudiar la definición de producto interno en espacios vectoriales reales.

Requisitos. Esta unidad de álgebra lineal se puede estudiar antes o después de la unidad "Formas bilineales y cuadráticas"; el estudio de una de estas unidades ayuda mucho en el estudio de la otra. En cualquier caso, se supone que los estudiantes conocen el producto punto en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1. Definición (producto interno en un espacio vectorial real). Sea V un espacio vectorial real. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se denomina *producto interno* en V si cumple con las siguientes propiedades:

i) p es lineal respecto al primer argumento:

$$\begin{aligned} p(u+v,w) &= p(u,w)+p(v,w) && \forall u,v,w \in V, \\ p(\lambda u,v) &= \lambda p(u,v) && \forall u,v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

ii) p es simétrica:

$$p(u,v) = p(v,u) \qquad \forall u,v \in V;$$

iii) p es definida positiva:

$$p(v,v) > 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

2. Linealidad respecto al otro argumento. Sea V un espacio vectorial real y sea p una función lineal respecto al primer argumento y simétrica. Entonces p es lineal respecto al segundo argumento:

$$\begin{aligned} p(u,v+w) &= p(u,w)+p(u,w) && \forall u,v,w \in V, \\ p(u,\lambda v) &= \lambda p(u,v) && \forall u,v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

Demostración. Aplicamos la propiedad simétrica, luego la propiedad aditiva o homogénea respecto al primer argumento, luego otra vez la propiedad simétrica:

$$\begin{aligned} p(u,v+w) &= p(v+w,u) = p(v,u)+p(w,u) = p(u,v)+p(u,w); \\ p(u,\lambda v) &= p(\lambda v,u) = \lambda p(v,u) = \lambda p(u,v). \end{aligned}$$ □

3. Notación común para el producto interno. En cualquier espacio vectorial real o complejo, excepto el espacio nulo $\{\mathbf{0}\}$, existen muchos productos internos. Si un espacio vectorial se considera con un producto interno fijo, entonces este producto interno se denota habitualmente por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir, en lugar de $p(u,v)$ se escribe $\langle u,v\rangle$.

Ejemplos de espacios vectoriales reales con producto interno

4. Ejemplo principal: $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico ("producto punto").

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que el producto punto se puede escribir en forma matricial:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x^\top y.$$

5. Ejemplo. $V^3(O)$ con el producto

$$\langle u, v\rangle \coloneqq |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v) \qquad \forall u, v \in V^3(O).$$

Las longitudes y el ángulo se definen con los axiomas de Euclides.

6. Ejemplo. $V^2(O)$ con el producto

$$\langle u, v\rangle \coloneqq |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v) \qquad \forall u, v \in V^2(O).$$

Notemos que $V^2(O)$ es un *subespacio del espacio euclideano* $V^3(O)$. Esto significa que $V^2(O)$ es un subespacio vectorial de $V^3(O)$, y el producto interno en $V^2(O)$ es una restricción del producto interno en $V^3(O)$.

7. Ejercicio. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Plan:

1) Recordar propiedades de la traza y de la matriz transpuesta.

2) Probar la propiedad lineal respecto al primer (o segundo) argumento.

3) Probar la propiedad simétrica: $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$.

4) Expresar $\langle A, B\rangle$ en términos de las entradas de A y B (se obtiene una suma doble).

5) Expresar $\langle A, A\rangle$ en términos de las entradas de A.

6) Mostrar que si $A \neq \mathbf{0}_{m\times n}$, entonces $\langle A, A\rangle > 0$.

8. Ejemplo. $\mathbb{R}^2$ con el siguiente producto interno:

$$\langle x, y\rangle \coloneqq x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = x^\top \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Es una forma bilineal simétrica, y para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0.$$

Falta notar que la igualdad $\langle x, x\rangle = 0$ es posible solamente cuando $x_1 + x_2 = 0$ y $x_2 = 0$, esto es, cuando $x = \mathbf{0}_2$.

9. Ejercicio. Demuestre que la función $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente regla es un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

$$\langle x, y\rangle \coloneqq 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Propiedades simples del producto interno en espacios vectoriales reales

10. Producto interno y el vector cero. Sea $v \in V$. Entonces

$$\langle \mathbf{0}, v\rangle = 0, \qquad \langle v, \mathbf{0}\rangle = 0.$$

Demostración. Demostremos que $\langle \mathbf{0}, v\rangle = 0$, entonces la igualdad $\langle v, \mathbf{0}\rangle = 0$ se obtendrá por la propiedad simétrica. □

11. Nota. En cualquier espacio vectorial real o complejo, excepto el espacio nulo $\{\mathbf{0}\}$, existen muchos productos internos. Si un espacio vectorial se considera con un producto interno fijo, entonces este producto interno se denota habitualmente por $\langle \cdot, \cdot\rangle$, es decir, en lugar de $p(u, v)$ se escribe $\langle u, v\rangle$.

12. Ejercicio. Sean $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$. Demuestre la fórmula:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \sum_{k=1}^{q} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \alpha_j \beta_k \langle u_j, v_k\rangle.$$

13. Definición (espacio euclideano). Un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno se llama *espacio euclideano*.