Propiedades de las operaciones algebraicas con números reales, ejercicios (repaso)

Objetivos. Repasar las propiedades principales de la adición y multiplicación de números reales.

Requisitos. Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$.

Propiedades de la adición en $\mathbb{R}$

1. Indique los nombres de las siguientes propiedades:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha + 0 = \alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha + (-\alpha) = 0$$

propiedad principal de 0 (0 es un neutro aditivo en $\mathbb{R}$)

propiedad principal del número opuesto (o inverso aditivo)

propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$

propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$

Propiedad que relaciona la multipicación con la adición

2. Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Es la propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la multipicación respecto la adición en $\mathbb{R}$.

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{R}$

3. Indique nombres de propiedades:

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$	propiedad conmutativa de la multipicación en $\mathbb{R}$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\beta = \beta\alpha$	propiedad asociativa de la multipicación en $\mathbb{R}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad 1\alpha = \alpha$	propiedad principal del número inverso
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\alpha\, \alpha^{-1} = 1$	propiedad principal de 1 (1 es un neutro multiplicativo en $\mathbb{R}$)

El neutro multipicativo es diferente del neutro aditivo

Esta propiedad es muy simple: $0 \neq 1$.

Todas propiedades juntas

1. Propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{?} = \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}.$$

2. Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$:

3. El número 0 es un neutro aditivo en $\mathbb{R}$:

4. Para cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un número *opuesto* (o *inverso aditivo*) que se denota por $\underbrace{\hspace{0.8cm}}_{?}$ y tiene la siguiente propiedad:

5. La multiplicación en $\mathbb{R}$ es distributiva respecto a la adición:

6. La multipicación en $\mathbb{R}$ es asociativa:

7. La multipicación en $\mathbb{R}$ es conmutativa:

8. El número 1 es un elemento neutro multiplicativo en $\mathbb{R}$:

9. Para cada número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe un número *inverso* (o *inverso multiplicativo*) que se denota por α^{-1} y tiene la siguiente propiedad:

10. Los elementos neutro aditivo y neutro multiplicativo en $\mathbb{R}$ son diferentes entre si:

$$\underbrace{\hspace{0.8cm}}_{?} \neq \underbrace{\hspace{0.8cm}}_{?}.$$

Un ejemplo de aplicación de propiedades principales de operaciones algebraicas en $\mathbb{R}$

4. Ejemplo. Demostrar de manera detallada que para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\alpha(\beta\gamma) = \gamma(\alpha\beta).$$

Hay que construir una cadena de igualdades que empieza con $\alpha(\beta\gamma)$ y termina con $\gamma(\alpha\beta)$. En cada paso hay que aplicar sólo una propiedad básica e indicar cuál propiedad se aplica.

Primera solución.

$$\alpha(\beta\gamma) \overset{(1)}{=\!=} \alpha(\gamma\beta) \overset{(2)}{=\!=} (\alpha\gamma)\beta \overset{(3)}{=\!=} (\gamma\alpha)\beta \overset{(4)}{=\!=} \gamma(\alpha\beta).$$

(1) La propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la multiplicación en $\mathbb{R}$ se aplica a los números β y γ.

(2) La propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la multiplicación en $\mathbb{R}$ se aplica a los números α, γ, β.

(3)

(4)

□

Segunda solución.

$$\alpha(\beta\gamma) \overset{(1)}{=\!=} (\alpha\beta)\gamma \overset{(2)}{=\!=} \gamma(\alpha\beta).$$

(1) La propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ en $\mathbb{R}$ se aplica a los números β y γ.

(2) La propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ en $\mathbb{R}$ se aplica a los números $\alpha\beta$ y γ. □