Sublistas básicas y rango de una lista de vectores

Objetivos. Definir el rango de una lista de vectores, introducir el concepto de sublista básica de una lista de vectores.

Requisitos. Base y dimensión.

1. Definición (rango de una lista de vectores). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en V. Entonces el *rango* de $\mathcal{A}$ se define como la dimensión del subespacio generado por $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) \coloneqq \dim(\ell(\mathcal{A})).$$

2. Ejemplo. Sean $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \in V^3(O)$ tres vectores complanares pero no colineares por pares. Entonces el espacio $S \coloneqq \ell(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ es un plano y

$$\mathrm{r}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \dim(S) = 2.$$

3. Nota. Según la definición del rango que hemos escrito, para determinar el rango de una lista (finita) de vectores $\mathcal{A}$, primero hay que considerar el subespacio S generado por $\mathcal{A}$ el cual por lo común es un conjunto infinito, y luego buscar una base de S. Afortunadamente algunas de las bases de S se pueden construir como sublistas de $\mathcal{A}$.

4. Definición (sublista básica de una lista de vectores). Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una lista de vectores y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ una sublista de $\mathcal{A}$, esto es, $b_1 = a_{i_1}, \ldots, b_k = a_{i_k}$, donde $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *sublista básica* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{B})$. La última condición significa que cualquier vector de $\mathcal{A}$ es una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

5. Ejemplo. Si $a_1, \ldots, a_5 \in V$, a_1, a_3, a_5 son linealmente independientes y $a_2, a_4 \in \ell(a_1, a_3, a_5)$, entonces (a_1, a_3, a_5) es una sublista básica de la lista $(a_1, \ldots, a_5)$.

6. Proposición (relación entre sublistas básicas y bases). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{A}$ una lista de vectores en V y $\mathcal{B}$ una sublista de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\mathcal{B}$ es una base de $\ell(\mathcal{A})$.

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $\mathcal{B}$ una sublista básica de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{B})$ y $\ell(\mathcal{A}) \subset \ell(\mathcal{B})$. Por otro lado, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{A})$. Con estas dos contenciones acabamos de demostrar que $\ell(\mathcal{A}) = \ell(\mathcal{B})$. Además $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, así que $\mathcal{B}$ es una base de $\ell(\mathcal{A})$.

$\Leftarrow$. Sea $\mathcal{B}$ una sublista de $\mathcal{A}$ y al mismo tiempo una base de $\ell(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{A}) = \ell(\mathcal{B})$. $\square$

7. Teorema (existencia de una sublista básica de una lista de vectores). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una lista de vectores en V. Entonces existe una sublista básica $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$.

Demostración. El sistema $\mathcal{B}$ se construye por pasos según la siguiente regla:

en cada paso incluimos en $\mathcal{B}$ al primer vector de $\mathcal{A}$
que no es combinación lineal de los vectores
incluidos en $\mathcal{B}$ en los pasos anteriores.

Formalmente,

$$\begin{aligned} k_1 &\coloneqq \min\big\{i \in \{1, \ldots, n\} :\ a_i \neq \mathbf{0}\big\}; \\ k_2 &\coloneqq \min\big\{i \in \{1, \ldots, n\} :\ a_i \notin \ell(a_{k_1})\big\}; \\ k_3 &\coloneqq \min\big\{i \in \{1, \ldots, n\} :\ a_i \notin \ell(a_{k_1}, a_{k_2})\big\}; \\ &\ldots \end{aligned}$$

El proceso se termina después de m pasos, si $\mathcal{A} = \ell(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$, y se pone

$$\mathcal{B} = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}).$$

Por construcción, cada elemento de $\mathcal{B}$ no es combinación lineal de los elementos anteriores. Por el criterio de dependencia lineal esto significa que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. $\square$

8. Corolario (cálculo del rango de una lista de vectores a través de una sublista básica). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{A}$ una lista de vectores en V y $\mathcal{B}$ una sublista básica de $\mathcal{A}$. Entonces

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = |\mathcal{B}|.$$

9. Ejemplo. Consideremos los vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que los vectores a_2 y a_4 son linealmente independientes, y cualquiera de estos 4 vectores es una combinación lineal de los vectores a_2 y a_4:

$$a_1 = -3a_2 + a_4, \qquad a_2 = 1a_2 + 0a_4, \qquad a_3 = 2a_2 + 5a_4, \qquad a_4 = 0a_2 + 1a_4.$$

Por lo tanto, (a_2, a_4) es una sublista básica de (a_1, a_2, a_3, a_4), y

$$\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2.$$

Caracterización de sublistas básicas como sublistas linealmente independientes máximas

En los siguientes ejercicios suponemos que $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ es una lista de vectores de un espacio vectorial V y $\mathcal{B} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ es una sublista de $\mathcal{A}$.

10. Ejercicios (toda sublista básica es máxima por el tamaño entre las sublistas linealmente independientes). Supongamos que $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es otra sublista linealmente independiente de $\mathcal{A}$. Entonces $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}|$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente. Indicación: procede por contraposición y aplique el teorema principal de la dependencia lineal.

11. Ejercicio (si una sublista es linealmente independiente y se vuelve linealmente dependiente al agregar un vector más, entonces es una sublista básica). Supongamos que $\mathcal{B}$ es una sublista linealmente independiente de $\mathcal{A}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ la lista $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_j)$ es linealmente dependiente. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$. Indicación: para demostrar que $\mathcal{B}$ genera a todos los vectores de $\mathcal{A}$ use el criterio de la dependencia lineal.

12. Resumen: caracterización de sublistas básicas como sublistas linealmente independientes máximas por contención y por tamaño. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{A}$ una lista de vectores de V y $\mathcal{B}$ una sublista de $\mathcal{A}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$;

(b) $\mathcal{B}$ es máxima por tamaño entre todas las sublistas linealmente independientes de $\mathcal{A}$;

(c) $\mathcal{B}$ es máxima por contención entre todas las sublistas linealmente independientes de $\mathcal{A}$.

Caracterización de sublistas básicas como sublistas generadores mínimas

En los siguientes ejercicios suponemos que $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ es una lista de vectores de un espacio vectorial V y $\mathcal{B} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ es una sublista de $\mathcal{A}$.

13. Ejercicio (toda sublista básica es mínima por el tamaño entre las sublistas generadores). Supongamos que $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es otra sublista de $\mathcal{A}$ tal que $a_1, \ldots, a_m \in \ell(\mathcal{C})$. Demuestre que $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{B}|$. Indicación: procede por contraposición y aplique el teorema principal de la dependencia lineal.

14. Ejercicio (si una sublista genera a la lista original y pierde esta propiedad al quitar cualquier vector, entonces es una sublista básica). Supongamos que $\mathcal{B} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ es una sublista de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{B})$ y para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ la lista $\mathcal{B}' = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \ldots, a_{i_k})$ ya no genera a todos los vectores de $\mathcal{A}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Indicación: procede por contraposición y use el criterio de la dependencia lineal.

15. Ejercicio. Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{A}$ una lista de vectores de V y $\mathcal{B}$ una sublista de $\mathcal{A}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ es una sublista básica de $\mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{B}$ es mínima por tamaño entre todas las sublistas de $\mathcal{A}$ que generan a todos los vectores de $\mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{B}$ es mínima por inclusión entre todas las sublistas de $\mathcal{A}$ que generan a todos los vectores de $\mathcal{A}$.

16. Proposición sobre el rango de una lista de vectores. El rango de una lista de vectores es:

- el tamaño de alguna de sus sublistas básicas;
- el tamaño máximo de sus sublistas linealemente independientes;
- el tamaño mínimo de sus sublistas generadores.