Rango de una matriz

Objetivos. Definir el rango de renglones y el rango de columnas de una matriz. Mostrar que estos rangos coinciden.

Requisitos. Rango de una lista de vectores, operaciones elementales y matrices elementales, matriz escalonada reducida, eliminación de Gauss.

1. Definiciones (rango de renglones y rango de columnas de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. El *rango de renglones de la matriz* A es el rango de la lista de sus renglones, es decir, la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^n$ generado por los renglones de A:

$$\mathrm{r}_r(A) \coloneqq \mathrm{r}(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}) = \dim(\ell(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*})).$$

El *rango de columnas de la matriz* A es el rango de la lista de sus columnas, es decir, la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^m$ generado por las columnas de A:

$$\mathrm{r}_c(A) \coloneqq \mathrm{r}(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}) = \dim(\ell(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n})).$$

2. Ejemplo. Usando solamente la definición calculemos el rango de renglones y el rango de columans de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Aquí $\mathrm{r}_r(A) = 2$ porque A tiene dos filas y estas son linealmente independientes. El rango de columnas también es 2, porque las primeras dos columnas son linealmente independientes y la tercera es una combinación lineal de las primeras dos: $A_{*,3} = A_{*,1} - A_{*,2}$.

Vamos a demostrar que el rango de renglones es igual al rango de columnas.

- Operaciones elementales por renglones no cambian el rango de renglones.
- Operaciones elementales por renglones no cambian las dependencias lineales entre las columnas; por consecuencia, no cambian el rango de columnas.
- El rango de renglones de una matriz pseudoescalonada coincide con el número de los renglones no nulas.
- En una matriz pseudoescalonada, las columnas que contienen elementos pivotes forman una sublista básica de la lista de columnas; en particular, el rango de columnas de una matriz pseudoescalonada es igual al número de los renglones no nulos.

3. Ejemplo: operaciones elementales por renglones no cambian las dependencias lineales entre las columnas. En el ejemplo anterior, teníamos $A_{*,1} - A_{*,2} - A_{*,3} = \mathbf{0}_2$. Sea B la matriz que se obtiene de la matriz A al aplicar la operación $R_2 += 2R_1$:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $B_{*,1} - B_{*,2} - B_{*,3} = \mathbf{0}_2$.

4. Proposición (operaciones elementales por renglones no cambian dependencias entre las columnas). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea B es una matriz obtenida de A al aplicar una operación elemental por renglones. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ y

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_{*,j} = \mathbf{0}_m. \tag{1}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j B_{*,j} = \mathbf{0}_m. \tag{2}$$

Demostración. Sabemos que operaciones elementales por renglones corresponden a la multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo. Por lo tanto, existe una matriz elemental E tal que $B = EA$. La j-ésima columna del producto EA es el producto de la matriz E por la j-ésima columna de A:

$$B_{*,j} = EA_{*,j}.$$

De aquí

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j B_{*,j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j EA_{*,j} = E\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_{*,j}\right) = E\mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m. \qquad \square$$

5. Corolario. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$, y sea $A_{*,j_1}, \ldots, A_{*,j_r}$ una sublista básica de las columnas de A. Entonces $B_{*,j_1}, \ldots, B_{*,j_r}$ es una sublista básica de las columnas de B. En particular, operaciones elementales por renglones no cambian el rango de columnas.

Demostración. Por la hipótesis del corolario, las columnas de la matriz A con índices $j_1, \ldots, j_r$ son linealmente independientes y cualquier columna de A es una combinación lineal de esas. Entonces tenemos lo mismo para las columnas de la matriz B, y $B_{*,j_1}, \ldots, B_{*,j_r}$ es una sublista básica de las columnas de B. $\square$

6. Proposición. Operaciones elementales de renglones no cambian el rango de renglones.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea B una matriz obtenida de A al aplicar una operación elemental por renglones. De la definición de operaciones elementales sigue que cada renglón de B es una combinación lineal de los renglones de A:

$$B_{1,*}, \ldots, B_{m,*} \in \ell(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}).$$

De la propiedad transitiva de las combinaciones lineales sigue que

$$\ell(B_{1,*}, \ldots, B_{m,*}) \subset \ell(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}).$$

Por eso $\mathrm{r}(B_{i,*})_{i=1}^{m} \le \mathrm{r}(A_{i,*})_{i=1}^{m}$.

Pero las operaciones elementales son invertibles. A se puede obtener de B al aplicar la operación elemental inversa. Por lo tanto también es cierta la desigualdad opuesta. $\square$

7. Proposición (rango de renglones de una matriz pseudoescalonada). En una matriz pseudoescalonada las filas no nulas son linealmente independientes, y el rango de renglones es igual al número de sus filas no nulas.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Supongamos que A tiene r filas no nulas con índices $i_1, \ldots, i_r$. Elijamos en cada una de las filas no nulas un elemento pivote. Denotemos por $p_1, \ldots, p_r$ los índices (de columnas) de estos pivotes. Demostremos que las filas $A_{i_1,*}, \ldots, A_{i_r,*}$ son linealmente independientes.

Razonando por contrario, supongamos que son linealmente dependientes. Entonces, por el criterio de un sistema linealmente dependiente, existe un índice $k \in \{1, \ldots, r\}$ tal que la fila $A_{i_k,*}$ se puede expresar a través de las filas posteriores, que tienen los índices $i_{k+1}, \ldots, i_r$. Pero en estas filas el p_k-ésimo elemento es cero, mientras $A_{i_k,p_k} \neq 0$. Contradicción. $\square$

8. Proposición (sublista básica de columnas de una matriz pseudoescalonada). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz pseudoescalonada. En cada fila no nula elejimos un "pivote", es decir, una entrada no nula tal que todas las entradas por abajo son nulas. Sean $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ las posiciones de estos pivotes. Entonces las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$ forman una sublista básica de la lista de las columnas de A. Por lo tanto, el rango de columnas de una matriz pseudoescalonada es igual al número de las filas no nulas.

Demostración. 1. Recordamos que operaciones elementales por renglones no cambian dependencias lineales entre las columnas. Usando operaciones elementales por renglones es posible transformar la matriz pseudoescalonada dada en una matriz pseudoescalonada reducida con elementos pivotes en las mismas posiciones. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la matriz dada A es pseudoescalonada reducida, y los elementos pivotes tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{lll} \forall k \in \{1, \ldots, r\} & A_{i_k, j_k} = 1, & \\ \forall k \in \{1, \ldots, r\} & \forall s \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_k\} & A_{s, j_k} = 0. \end{array}$$

2. Demostremos que las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k A_{*, j_k} = \mathbf{0}_m. \tag{3}$$

Elijamos arbitrariamente $p \in \{1, \ldots, r\}$ y consideremos la i_p-ésima componente del vector que está escrito en el lado izquierdo de (3):

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k A_{i_p, j_k} = \lambda_p \underbrace{A_{i_p, j_p}}_{\substack{\parallel \\ 1}} \sum_{\substack{1 \le k \le r \\ k \ne p}} \lambda_k \underbrace{A_{i_p, j_k}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \lambda_p.$$

Por otro lado, la i_p-ésima componente del vector escrito en el lado derecho de (3) es cero, así que $\lambda_p = 0$. El índice p era arbitrario, así que todos los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deben ser cero y las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$ son linealmente independientes.

3. Sea $q \in \{1, \ldots, n\}$. Demostremos que la q-ésima columna de A es una combinación lineal de las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$. De hecho,

$$A_{*, q} = \sum_{k=1}^{r} A_{i_k, q} A_{*, j_k}.$$

Para verificar esta igualdad, calculemos la componende con índice i_p $(1 \le p \le r)$:

$$\sum_{k=1}^{r} A_{i_k, q} A_{i_p, j_k} = \sum_{k=1}^{r} A_{i_k, q} \delta_{p,k} = A_{i_p, q}.$$ □

9. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aquí $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. Las columnas $A_{*,2}$, $A_{*,3}$, $A_{*,5}$ forman una sublista básica de la lista de columnas. Por ejemplo, la columna $A_{*,4}$ se expresa a través de $A_{*,2}$, $A_{*,3}$, $A_{*,5}$ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10. Teorema (sobre el rango de renglones y el rango de columnas de una matriz). El rango de renglones de una matriz coincide con el rango de las columnas.

Demostración. Sabemos que toda matriz A se puede transformar en una matriz pseudoescalonada B por medio de operaciones elementales por renglones. La Proposición 6 y el Corolario 5 garantizan que estas operaciones elementales no cambian el rango de renglones ni el rango de columnas. Por las Proposiciones 7 y 8, en la matriz pseudoescalonada B el rango de renglones es igual al rango de columnas, así que

$$\mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_r(B) = \mathrm{r}_c(B) = \mathrm{r}_c(A). \qquad \square$$

11. Definición (rango de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. El *rango* de A es su rango de renglones o, que es lo mismo, su rango de columnas:

$$\mathrm{r}(A) \coloneqq \mathrm{r}(A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}) = \mathrm{r}(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}).$$

12. Corolario (sobre el rango de la matriz transpuesta). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Entonces $\mathrm{r}(A^\top) = \mathrm{r}(A)$.

13. Corolario. El rango de una matriz no se cambia al aplicar operaciones elementales por columnas.