Formas cuadráticas y su relación con formas bilineales

Objetivos. Definir formas cuadráticas a través de formas bilineales simétricas, establecer las identidades de polarización, describir formas cuadráticas a través de la propiedad homogénea de grado dos y la identidad de paralelogramo.

Requisitos. Formas bilineales, formas bilineales simétricas.

1. Definición (forma cuadrática). Sea V un espacio vectorial real. Una función $q\colon V \to \mathbb{R}$ se llama *forma cuadrática* en V si existe una forma bilineal simétrica $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ tal que

$$\forall x \in V \qquad q(x) = f(x, x).$$

En esta situación se dice que q es la forma cuadrática *asociada* a la forma bilineal f, y que f es la forma bilineal *polar* de q. Al conjunto de todas las formas cuadráticas en V lo denotemos por $\mathcal{Q}(V)$.

2. Ejemplo. Sea $f \in \mathcal{BL}_s(\mathbb{R}^2)$,

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2.$$

Entonces la forma cuadrática asociada a f es

$$q(x) = 3x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2.$$

3. Ejemplo (cuadrado de la norma asociada a un producto interno). Sean V un espacio vectorial real con un producto interno, $\|\cdot\|$ la norma asociada a este producto interno. Entonces la función $q(x) \coloneqq \|x\|^2$ es una forma cuadrática en V.

4. Observación. Formas bilineales se pueden considerar como una generalización de producto interno, y formas cuadráticas corresponden al cuadrado de la norma.

5. Ejercicio. Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Demuestre que $q(\mathbf{0}) = 0$.

6. Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ la forma cuadrática asociada a f. Demuestre que para todo $u, v \in V$

$$q(u + v) = q(u) + 2f(u, v) + q(v).$$

7. Ejercicio. Sean $g, h \in \mathcal{BL}(V)$, g simétrica, h antisimétrica, $f = g + h$. Consideremos la función $q\colon V \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\forall v \in V \qquad q(v) \coloneqq f(v, v).$$

Demuestre que q es una forma quadrática en V y encuentre su forma bilineal polar (¡simétrica!).

8. Proposición (identidades de polarización para una forma cuadrática real). Sea $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ y sea q la forma cuadrática asociada a f. Entonces f se puede expresar a través de q mediante las siguientes fórmulas:

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\big(q(u+v) - q(u-v)\big) \qquad \forall x, y \in V;$$
$$f(u,v) = \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big) \qquad \forall x, y \in V.$$

9. Ejercicio. Demuestre las identidades de polarización.

10. Proposición. Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Entonces q es homogénea de grado dos y cumple con la identidad de paralelogramo:

$$q(\alpha v) = \alpha^2 q(v) \qquad \forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$
$$q(u+v) + q(u-v) = 2(q(u) + q(v)) \qquad \forall u, v \in V.$$

11. Ejercicio. Demuestre la proposición.

12. Ejercicio. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante la siguiente regla de correspondencia, no es forma cuadrática:

$$q(x) = x_1 - x_2^2.$$

Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

13. Definición (restricción de un mapeo a un subconjunto del dominio). Sean X, Y conjuntos, sea $\varphi\colon X \to Y$ una función y sea $Z \subset X$. Entonces el mapeo $\psi\colon Z \to Y$, definido mediante la regla

$$\psi(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in Z,$$

se llama la *restricción de* φ *a* Z y se denota por $\varphi|_Z$.

14. Proposición (restricción de una forma cuadrática a un subespacio). Sea V un espacio vectorial real, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea S un subespacio de V. Entonces $q|_S \in \mathcal{Q}(S)$, es decir, la restricción de q a S es una forma cuadrática en S.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ la forma bilineal simétrica polar de q. Consideremos su restricción al conjunto $S \times S$:

$$f|_{S\times S}\colon S \times S \to \mathbb{R}, \qquad f|_{S\times S}(u, v) \coloneqq f(u, v) \quad \forall u, v \in S.$$

Las igualdades

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha f(u, w) + \beta f(v, w), \\ f(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha f(u, v) + \beta f(u, w), \\ f(u, v) &= f(v, u) \end{aligned}$$

se cumplen para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $u, v, w \in V$; en particular, para cualesquiera $u, v, w \in S$. Por lo tanto, $f|_{S\times S}$ es una forma bilineal simétrica en S. Además para cualquier vector v en S tenemos que

$$f|_{S\times S}(v, v) = f(v, v) = q(v) = q|_S(v),$$

lo cual significa que $q|_S$ es la forma cuadrática asociada a $f|_{S\times S}$. □

15. Ejemplo. Consideremos una forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ y un subespacio S del espacio $\mathbb{R}^3$:

$$q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2 + 5x_3^2,$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} : \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \ell(e_1, e_3).$$

Entonces

$$q|_S(x) = x_1^2 + 5x_3^2 \qquad \forall x \in S.$$