Matriz hessiana
y algunas aplicaciones de formas cuadráticas
en Cálculo de varias variables

Objetivos. Conocer algunas aplicaciones de formas cuadráticas en Cálculo de varias variables.

Requisitos. Forma cuadrática, matriz asociada a una forma cuadrática, índices de inercia de una forma cuadrática, funciones de varias variables, matriz hessiana.

1. Definición (matriz hessiana, matriz de las segundas derivadas parciales). Sea D un conjunto de $\mathbb{R}^n$, a un punto interior de D, $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función que tenga segundas derivadas parciales continuas en el punto a. Entonces la matriz de las segundas derivadas parciales de la función f en el punto a,

$$\begin{bmatrix} (D_{1,1}f)(a) & \ldots & (D_{1,n}f)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_{n,1}f)(a) & \ldots & (D_{n,n}f)(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{bmatrix},$$

se denota por $f''(x)$ o $H_f(x)$ y se llama la *matriz hessiana* de la función f en el punto x.

Criterio de convexidad en términos de la matriz hessiana

2. Definición (función convexa). Sea D un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ se llama *convexa* en D si para todos $a, b \in D$ y para todos $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b).$$

3. Definición (función estrictamente convexa). Sea D un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ se llama *estrictamente convexa* en D si para todos $a, b \in D$ tales que $a \neq b$ y todos $\lambda, \mu > 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda a + \mu b) < \lambda f(a) + \mu f(b).$$

4. Teorema (criterio de convexidad en términos de la matriz hessiana). Sea D un conjunto convexo abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^2(D)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) La función f es convexa en D.

(b) Para todo $x \in D$, la matriz $f''(x)$ es no negativa definida: $f''(x) \geq 0$.

5. Teorema (condición suficiente para convexidad estricta en términos de la matriz hessiana). Sea D un conjunto convexo abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C^2(D)$. Si la matriz hessiana de f es positiva definida en todo punto $x \in D$:

$$\forall x \in D \qquad f''(x) > 0,$$

entonces f es estrictamente convexa en D.

Análisis de puntos críticos por medio de la matriz hessiana

6. Teorema (condición suficiente para el punto mínimo, el punto máximo y el punto silla, en términos de la matriz hessiana). Sea $f \in C^2(D)$, donde D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, y sea a un punto interior de D tal que $f'(a) = \mathbf{0}_n$.

- Si $f''(a) > 0$, entonces a es un punto de mínimo local de f.
- Si $f''(a) < 0$, entonces a es un punto de máximo local de f.
- Si $f''(a) \gtrless 0$, entonces a no es punto extremo local de f.

7. Observación. Si en las condiciones del teorema tenemos $f'' \geqq 0$ o $f'' \leqq 0$, entonces la matriz hessiana no permite hacer ninguna conclusioń (se necesita análisis más fino).

8. Ejemplo.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Derivadas:

$$f'_x = 3x^2 - 3y, \qquad f'_y = 3y^2 - 3x.$$

Puntos críticos: $(1, 1)$ y $(0, 0)$.
Segundas derivadas:

$$f''_{xx} = 6x, \qquad f''_{xy} = -3, \qquad f''_{yy} = 6y.$$

Matrices hessianas en los puntos críticos:

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \gtrless 0, \qquad f''(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} > 0.$$

Respuesta: $(1, 1)$ es un punto de mínimo, $(0, 0)$ es una silla.

9. Ejercicios. Halle máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.
- $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2x$.
- $f(x, y) = (x + y^2)e^{x/2}$.
- $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.