Signo de los valores de una forma cuadrática

Objetivos. Estudiar qué valores (positivos, negativos o cero) puede tomar una forma cuadrática dependiendo de sus índices de inercia.

Requisitos. Índices de inercia de una forma cuadrática.

1. Definición. Sea V un espacio vectorial real y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Vamos a usar las siguientes notaciones:

1. $q > 0$ si $q(x) > 0$ para todo $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.
2. $q \geq 0$ si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in V$.
3. $q \geqq 0$ si $q \geq 0$ pero $q \not> 0$.
4. $q < 0$ si $q(x) < 0$ para todo $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.
5. $q \leq 0$ si $q(x) \leq 0$ para todo $x \in V$.
6. $q \leqq 0$ si $q \leq 0$ pero $q \not< 0$.
7. $q \gtrless 0$ si $q \ngeq 0$ y $q \nleq 0$, esto es, existen $x, y \in V$ tales que $q(x) > 0$, $q(y) < 0$.

2. Observación. En la definición de $q > 0$ y $q < 0$ es importante excluir el vector cero porque $q(\mathbf{0}) = 0$ para toda $q \in \mathcal{Q}(V)$.

3. Ejemplo. La forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ definida por la regla

$$q(x) = -3x_1^2 - 5x_2^2 \qquad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

es *estrictamente negativa* o *negativa definida* (notación: $q < 0$) porque $q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

4. Ejemplo. La forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ definida por la regla

$$q(x) = 4x_1^2 \qquad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

es *no negativa* o *positiva semidefinida* (notación: $q \geq 0$) porque $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Notemos que q no es estrictamente positiva:

$$q \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{aunque} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

En tal situación decimos que q es *pseudodefinida* y escribimos $q \geqq 0$.

5. Ejemplo. La forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ definida por la regla

$$q(x) = 3x_1^2 - 7x_2^2 \qquad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

es *indefinida* (notación: $q \gtrless 0$) porque toma valores de ambos signos:

$$q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 > 0, \qquad q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -7 < 0.$$

6. Proposición (criterio de que $q > 0, q < 0, q \ge 0, q \le 0, q \geqq 0, q \leqq 0, q \gtrless 0$ en términos de los índices de inercia). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Entonces:

1. $q > 0 \iff \mathrm{r}_+(q) = n.$
2. $q \ge 0 \iff \mathrm{r}_-(q) = 0.$
3. $q \geqq 0 \iff \mathrm{r}_-(q) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{r}_+(q) < n.$
4. $q < 0 \iff \mathrm{r}_-(q) = n.$
5. $q \le 0 \iff \mathrm{r}_+(q) = 0.$
6. $q \leqq 0 \iff \mathrm{r}_+(q) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{r}_-(q) < n.$
7. $q \gtrless 0 \iff \mathrm{r}_+(q) > 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{r}_-(q) > 0.$

7. Ejercicio (factorización de la matriz asociada a una forma cuadrática estrictamente positiva). Sea V un espacio vectorial real, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $q > 0$;

(b) existe una matriz invertible $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $q_{\mathcal{E}} = B^t B$.

Sugerencia: utilice una base con respecto a la cual q es diagonal con elementos $1, -1, 0$ en la diagonal principal.

8. Ejercicio (factorización de la matriz asociada a una forma cuadrática no negativa). Sea V un espacio vectorial real, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $q \ge 0$;

(b) existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $q_{\mathcal{E}} = B^t B$.