Representación matricial de formas cuadráticas

Objetivos. Expresar el valor de una forma cuadrática a través de las coordenadas del vector en una base y la *matriz de la forma cuadrática* en esta base. Estudiar el cambio de la matriz de la forma cuadrática al cambiar la base del espacio.

Requisitos. Formas bilineales, representación matricial de una forma bilineal, identidad de polarización.

1. Correspondencia entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas (repaso). Sea V un espacio vectorial real. Cada forma bilineal simétrica $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ induce a una forma quadrática $q \in \mathcal{Q}(V)$ mediante la siguiente regla:

$$q(v) \coloneqq f(v, v).$$

Se cumplen las identidades de polarización:

$$f(u, v) = \frac{1}{4}\big(q(u + v) - q(u - v)\big), \qquad f(u, v) = \frac{1}{2}\big(q(u + v) - q(u) - q(v)\big).$$

Por lo tanto, f se determina de manera única por q. Se dice que f es la forma bilineal *polar* a la forma cuadrática q. Por definición, la forma bilineal polar de una forma cuadrática es *simétrica.*

2. Definición (matriz asociada a una forma cuadrática respecto a una base). Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita, $q \in \mathcal{Q}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces la *matriz asociada a q respecto a la base* $\mathcal{B}$ se define como la matriz asociada a f respecto a $\mathcal{B}$, donde f es la forma bilineal polar de q:

$$q_{\mathcal{B}} \coloneqq f_{\mathcal{B}}.$$

La definición es correcta porque f está determinada por q de manera única mediante las identidades de polarización.

3. Ejercicio. Exprese las entradas de la matriz $q_{\mathcal{B}}$ a través de los valores de q en ciertos vectores. La forma bilineal polar f no debe aparecer en la respuesta.

4. Matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica. La matriz $q_{\mathcal{B}}$ se define como $f_{\mathcal{B}}$, donde f es la forma bilineal polar de q. Esta forma bilineal f es simétrica (por definición), por eso su matriz asociada $f_{\mathcal{B}}$ es simétrica.

5. Rango de una forma cuadrática. El rango de una forma cuadrática se define como el rango de su forma bilineal polar o, que es lo mismo, como el rango de su matriz asociada respecto a cualquier base.

6. Proposición (representación matricial de una forma cuadrática). Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita con una base $\mathcal{B}$ y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Entonces para cualquier $v \in V$,

$$q(v) = v_{\mathcal{B}}^{\top} q_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

Si $v_{\mathcal{B}} = x = \left[x_j\right]_{j=1}^{n}$ y $q_{\mathcal{B}} = A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}$, entonces

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_i x_j.$$

Demostración. Sea f la forma polar a q. Sabemos que $f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}$. Recordando que $q(v) = f(v, v)$ y $q_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$ obtenemos las fórmulas requeridas. □

7. Ejemplo. La función $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = 3x_1^2 + 7x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

es una forma cuadrática. Su forma bilineal polar es

$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 7x_2y_2 - 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2,$$

y la matriz asociada a q y a f con respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ es

$$q_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Lema. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$, esto es, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A^{\top} = A$. Entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x^{\top} A y = y^{\top} A x.$$

Demostración. Notemos que el producto $x^{\top} A y$ es un número real y se puede considerar como una matriz real de tamaño 1×1. La transpuesta de esta matriz coincide con ella misma, y obtenemos lo siguiente:

$$x^{\top} A y = (x^{\top} A y)^{\top} = y^{\top} A^{\top} (x^{\top})^{\top} = y^{\top} A x.$$ □

9. Proposición (unicidad de la matriz que representa a una forma cuadrática). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Supongamos que $C \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ tal que para cualquier $v \in V$ se cumple la igualdad

$$q(v) = v_{\mathcal{B}}^{\top} C v_{\mathcal{B}}.$$

Entonces $q_{\mathcal{B}} = C$.

Idea de demostración. Denotemos por f a la forma bilineal polar de q. Por definición, f es simétrica y $q_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$. Vamos a demostrar que $f_{\mathcal{B}} = C$. Usamos la identidad de polarización, propiedades del producto de matrices y el lema anterior:

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right) \\
&= \frac{1}{4}\big((u_{\mathcal{B}} + v_{\mathcal{B}})^\top C(u_{\mathcal{B}} + v_{\mathcal{B}}) - (u_{\mathcal{B}} - v_{\mathcal{B}})^\top C(u_{\mathcal{B}} - v_{\mathcal{B}})\big) \\
&= \ldots \textit{(complete los pasos omitidos)} \ldots \\
&= \frac{1}{4}\left(2u_{\mathcal{B}}^\top C v_{\mathcal{B}} + 2v_{\mathcal{B}}^\top C u_{\mathcal{B}}\right) \\
&= u_{\mathcal{B}}^\top C v_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Aquí $u, v \in V$ son vectores arbitrarios. Por la unicidad de la representación matricial de una forma bilineal, $f_{\mathcal{B}} = C$. $\square$

10. Ejercicio. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla de correspondencia

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$. Calcule la matriz asociada a q respecto a la base canónica. Indicación: hay que encontrar una forma bilineal *simétrica* f tal que $q(x) = f(x,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

11. Cambio de la matriz de una forma cuadrática al cambiar la base. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{F}$ bases de V. Entonces

$$q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{F}}^\top q_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{F}}.$$

12. Definición (matrices congruentes). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es *congruente* a B y se escribe $A \cong B$ si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$B = P^\top A P.$$

13. Ejercicio. Demuestre que la congruencia de matrices en una relación de equivalencia. En otras palabras, demuestre que la relación $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva.