Índices de inercia de una forma cuadrática

Objetivos. Definir los *índices de inercia* (= *rangos de inercia*) de una forma cuadrática. Estudiar la relación entre la "definición geométrica" de los índices de inercia (en términos de las dimensiones de ciertos subespacios) y la "definición algebráica" (usando la representación diagonal). Como un corolario obtener *la ley de inercia de formas cuadráticas.* Estudiar la equivalencia de formas cuadráticas y la equivalencia bajo la congruencia de matrices reales simétricas.

Requisitos. Matriz asociada a una forma cuadrática, restricción de una forma cuadrática a un subespacio, reducción de una forma cuadrática a su forma canónica.

1. Definición (forma cuadrática es estrictamente positiva en un subespacio, forma cuadrática es escrictamente negativa en un subespacio). Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea S un subespacio de V.

- Se dice que q es *estrictamente positiva en el subespacio* S y se escribe $q|_S > 0$ si

$$\forall v \in S \setminus \{\mathbf{0}_V\} \qquad q(v) > 0.$$

- Se dice que q es *estrictamente negativa en el subespacio* S y se escribe $q|_S < 0$ si

$$\forall v \in S \setminus \{\mathbf{0}_V\} \qquad q(v) < 0.$$

2. Definición (los índices de inercia de una forma cuadrática). Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita, q una forma cuadrática en V. El *rango positivo* (o *el índice positivo de inercia*) de q es la dimensión máxima de subespacios en los cuales q es estrictamente positiva:

$$\mathrm{r}_+(q) = \max\Big\{\dim(S)\colon \quad S \le V, \quad q|_S > 0\Big\}.$$

El *rango negativo* (o *el índice negativo de inercia*) de q es la dimensión mínima de subespacios en los cuales q es estrictamente negativa:

$$\mathrm{r}_-(q) = \max\Big\{\dim(S)\colon \quad S \le V, \quad q|_S < 0\Big\}.$$

3. Teorema (de los índices de inercia). Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V tal que la matriz $q_{\mathcal{B}}$ es diagonal y tiene la siguiente forma:

$$q_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p-m}).$$

Entonces $p = \mathrm{r}_+(q)$, $m = \mathrm{r}_-(q)$.

Demostración. Denotemos los vectores de la base $\mathcal{B}$ por $b_1, \ldots, b_n$ y consideremos los siguientes subespacios de V:

$$W^+ = \ell(b_1, \ldots, b_p), \qquad W^- = \ell(b_{p+1}, \ldots, b_{p+m}), \qquad W^0 = \ell(b_{p+m+1}, \ldots, b_n).$$

Es fácil ver que q es estrictamente positiva en W^+. Por eso $\mathrm{r}_+(q) \geq p$.

Denotemos por f a la forma bilineal simétrica polar a q. Mostremos que $f(v, w) = 0$ para todo $v \in V$ y todo $w \in W^0$. En realidad, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \qquad w = \sum_{j=p+m+1}^{n} \mu_j b_j,$$

entonces

$$f(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=p+m+1}^{n} \lambda_i \mu_j f(b_i, b_j) = 0$$

porque $f(b_i, b_j) = 0$ siempre que $j > p + m$ (pues los renglones de la matriz $q_{\mathcal{E}}$ con índices $> p + m$ son nulas).

Sea S un subespacio de V tal que $q|_S > 0$. Tenemos por demostrar que $\dim(S) \leq p$. Para ello probemos que

$$S \cap (W^- + W^0) = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Supongamos que $x \in W^-$, $y \in W^0$, $x + y \in S$. Entonces por un lado

$$q(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, x) = q(x) \leq 0,$$

por otro lado $q(x + y) \geq 0$ pues $x + y \in S$. Esto es posible sólo cuando $q(x + y) = 0$, que implica $x + y = \mathbf{0}_V$.

Acabamos de demostrar que $S \cap (W^- + W^0) = \{\mathbf{0}_V\}$. De aquí por la fórmula de Grassmann,

$$\dim(S) = \dim(S + W^- + W^0) - \dim(W^- + W^0) \leq n - m - (n - p - m) = p.$$

Así que $\dim(S) \leq p$ y por lo tanto $\mathrm{r}_+(q) \leq p$.

Para demostrar la afirmación acerca de $\mathrm{r}_-(q)$, hay que aplicar la parte ya demostrada a la forma cuadrática $-q$. $\square$

4. Corolario (cómo calcular los índices de inercia de una forma cuadrática a través de una representación diagonal). Sea V un EV/$\mathbb{R}$, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V tal que la matriz $q_{\mathcal{B}}$ es diagonal:

$$q_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Entonces

$$\mathrm{r}_+(q) = \left|\left\{i \in \{1, \ldots, n\}\colon \quad d_i > 0\right\}\right|, \qquad \mathrm{r}_-(q) = \left|\left\{i \in \{1, \ldots, n\}\colon \quad d_i < 0\right\}\right|.$$

5. Corolario (la ley de inercia de formas cuadráticas). Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V tales que $q_{\mathcal{B}}$ y $q_{\mathcal{B}'}$ son diagonales con entradas $1, -1, 0$:

$$q_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m}, 0, \ldots, 0), \qquad q_{\mathcal{B}'} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p'}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m'}, 0, \ldots, 0).$$

Entonces $p = p'$ y $m = m'$.

6. Corolario (relación entre el rango y los índices de inerica).

$$\mathrm{r}(q) = \mathrm{r}_+(q) + \mathrm{r}_-(q).$$

7. Ejercicio (el "núcleo" de una forma cuadrática es cerrado con respecto a la multiplicación por escalares). Demuestre que para toda $q \in \mathcal{Q}(V)$ el conjunto

$$N_q \coloneqq \{v \in v\colon q(v) = 0\}$$

contiene $\mathbf{0}_V$ y es cerrado con respecto a la multiplicación por escalares.

8. Ejercicio (el "núcleo" de una forma cuadrática no siempre es un espacio vectorial). Encuentre un ejemplo de $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ tal que N_q no sea espacio vectorial. Sugerencia: calcule N_q para cada una de las siguientes formas cuadráticas:

$$q(x) = 0, \qquad q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \qquad q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2.$$

9. Tarea adicional (dimensión máxima de subespacios vectoriales contenidos en el "núcleo" de una forma cuadrática). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Demuestre que

$$\max\{\dim(S)\colon S \le V \text{ y } S \subseteq N_q\} = \dim(V) - \mathrm{r}(q).$$