Diagonalización de formas cuadráticas con el método de Lagrange

Objetivos. Practicar el método de diagonalización de Lagrange de formas cuadráticas.

Requisitos. Formas cuadráticas, cambio de base.

1. Teorema. Sea V un EV real de dimensión finita y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $q_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Demostración. La demostración es por inducción sobre $n = \dim(V)$. En vez de estudiar la demostración abstracta, vamos a aprender el algoritmo con ejemplos numéricos. □

Ejemplos

Copyright. Los ejemplos de esta sección pertenecen a Vadim D. Kryakvin.

2. Ejemplo.

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3.$$

Solución.

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 - 12x_2x_3 - 9x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2(x_2 + 3x_3)^2 + 9x_3^2. \end{aligned}$$

En coordenadas

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, \qquad y_2 = x_2 + 3x_3, \qquad y_3 = x_3$$

tenemos que

$$q(x) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2.$$

Expresamos x_i a través de y_i:

$$x_3 = y_3, \qquad x_2 = y_2 - 3y_3, \qquad x_1 = y_1 - 2y_2 + 7y_3.$$

Comprobación:

$$q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}^t q_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}\to\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, -2, 9).$$

Haciendo el cambio $z_1 = y_1$, $z_2 = 3y_3$, $z_3 = \sqrt{2}y_2$, podemos reducir q a una forma *normal*, donde todos los coeficientes son iguales a 1, -1 o 0:

$$q(x) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

□

3. Cambio de variables cuando no hay cuadrados. Consideremos el caso cuando una forma cuadrática no contiene los cuadrados, esto es, todos los coeficientes $a_{i,i}$ son iguales a cero:

$$q(x) = \sum_{i<j} 2a_{i,j}x_i x_j.$$

En este caso se hace el cambio de variables

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n}(a_{1,k} + a_{2,k})x_k, \qquad y_2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{1,k} - a_{2,k})x_k. \tag{1}$$

Muestre que q se puede escribir de la siguiente manera:

$$q(x) = \frac{1}{2a_{1,2}}y_1^2 - \frac{1}{2a_{1,2}}y_2^2 + \tilde{q}(x_3, \ldots, x_n),$$

donde $\tilde{q}$ ya no depende de x_1 y x_2.

4. Ejercicio. Muestre que las fórmulas (1) se pueden escribir en términos de derivadas parciales de la siguiente manera:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2}\right), \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_2}\right). \tag{2}$$

5. Ejemplo. $q(x) = 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Solución. Hacemos el cambio de variables usando las fórmulas (1):

$$\begin{aligned} y_1 &= (0+1)x_1 + (1+0)x_2 + (-4+3)x_3 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 &= (0-1)x_1 + (1-0)x_2 + (-4-3)x_3 = -x_1 + x_2 - 7x_3. \end{aligned}$$

Calculemos $\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$:

$$\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = -24x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_3x_3.$$

De aquí

$$q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 24x_3^2.$$

Hacemos el cambio $y_3 = x_3$ y obtenemos

$$q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 24y_3^2.$$

$\square$

6. Ejemplo. $q(x) = x_1^2 + 16x_2^2 + 9x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$.

7. Ejemplo. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_3x_4$.

Solución.

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 = \\ &= (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3 + x_4)^2. \end{aligned}$$

En las coordenadas

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \quad y_2 = x_2 + x_3 - x_4, \quad y_3 = x_2 - x_3 + x_4, \quad y_4 = x_4$$

obtenemos que

$$q(x) = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

Expresamos x_i a través de y_i:

$$x_4 = y_4, \quad x_3 = \frac{y_2 - y_3 + 2y_4}{2}, \quad x_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_1 = y_1 - y_3.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1/2, -1/2, 0). \end{aligned}$$

□

8. Ejemplo. $q(x) = x_1^2 + 14x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Solución.

$$q(x) = (x_1 - 4x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 - 2x_3)^2 + 7x_3^2.$$

□

9. Ejemplo. $q(x) = 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 3x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

Solución.

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_2 + x_1 + x_3 + x_4)^2 - x_1^2 - 4x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 \\ &= (x_2 + x_1 + x_3 + x_4)^2 - (x_1 - 2x_3 - x_4)^2. \end{aligned}$$

En las coordenadas

$$y_1 = x_2 + x_1 + x_3 + x_4, \qquad y_2 = x_1 - 2x_3 - x_4, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4$$

obtenemos que

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2.$$

Expresamos x_i a través de y_i:

$$x_3 = y_3, \qquad x_4 = y_4, \qquad x_1 = y_2 + 2y_3 + y_4, \qquad x_2 = y_1 - y_2 - 3y_3 - 2y_4.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

□

10. Ejercicios.

1. $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$;
2. $q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 14x_2^2 - 48x_2x_3 + 45x_3^2$;
3. $q(x) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 18x_1x_3 + x_2^2 + 30x_2x_3 - 16x_3^2$;
4. $q(x) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2^2 + 24x_2x_3 + 11x_3^2$;
5. $q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 19x_2^2 + 30x_2x_3 - 20x_3^2$;
6. $q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 3x_3^2$.

11. Ejercicios.

1. $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;
2. $q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 3x_4^2$;
3. $q(x) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_3x_4$;
4. $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$;
5. $q(x) = -x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4$;
6. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3^2 - 6x_3x_4 + 5x_4^2$.