

Criterio de Sylvester

Objetivos. Aprender a aplicar el criterio de Sylvester para analizar cuándo una forma cuadrática es positiva definida, usando los menores principales de su matriz asociada. También determinar cuándo una forma cuadrática es negativa definida, positiva semi-definida, negativa semidefinida y no definida. Aplicar estos criterios a varios ejemplos numéricos.

Requisitos. La matriz de una forma cuadrática, el método matricial de diagonalización de formas cuadráticas, experiencia en el cálculo de determinantes y menores.

1. Definición (menores principales de una matriz cuadrada). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. El *menor principal* de A ubicado en los renglones y columnas con índices i_1, \dots, i_k se define mediante la siguiente fórmula:

$$\delta_{i_1, \dots, i_k}(A) := M_A \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{matrix} \right) = \det \left(A_{\{i_1, \dots, i_k\}, \{i_1, \dots, i_k\}} \right).$$

El número k se denomina el *orden* o *tamaño* de menor.

2. Ejemplo. Consideremos una matriz cuadrada A de orden 5 con entradas diagonales ($A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$). Escribamos el menor principal de A ubicado en la intersección de los renglones 2, 4, 5 con las columnas 2, 4, 5. Indiquemos en la matriz A las entradas que forman este menor:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{bmatrix}, \quad \delta_{2,4,5}(A) = \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{4,2} & A_{4,4} & A_{4,5} \\ A_{5,2} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{vmatrix}.$$

3. Definición (menores principales líderes de una matriz cuadrada). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \{1, \dots, n\}$. El *menor de esquina* o sea el *menor principal líder* de k -ésimo orden de A se define como el menor principal que está en la intersección de los primeros k renglones y las primeras k columnas de la matriz A :

$$\Delta_k(A) = \delta_{1, \dots, k}(A) = \det \left(A_{\{1, \dots, k\}, \{1, \dots, k\}} \right).$$

4. Observación. Una matriz cuadrada de orden n tiene n menores de esquina de órdenes $1, \dots, n$. El número de menores principales de orden k es $\binom{n}{k}$. El número total de menores principales de órdenes $1, \dots, n$ es $2^n - 1$. Es cómodo pensar que el conjunto vacío de índices corresponde al menor vacío cuyo valor es 1: $\Delta_0(A) = \delta_\emptyset(A) = 1$.

5. Ejemplo. Calculemos los menores principales y, en particular, los menores de esquina, de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Los menores de esquina son

$$\Delta_1(A) = 2, \quad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 43, \quad \Delta_3(A) = \det(A) = 285.$$

Los menores principales son

$$\begin{aligned} \delta_1(A) &= 2, & \delta_2(A) &= 4, & \delta_3(A) &= 6, \\ \delta_{1,2}(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 43, & \delta_{1,3}(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 13, & \delta_{2,3}(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \\ \delta_{1,2,3}(A) &= \det(A) = 285. \end{aligned}$$

Criterio de Sylvester para que $q > 0$

6. Teorema (criterio de Sylvester para que una forma cuadrática sea positiva definida). Sean V un espacio vectorial real de dimensión n , $q \in \mathcal{Q}(V)$, \mathcal{B} una base de V . Denotamos por q a la matriz asociada a la forma cuadrática q respecto a la base \mathcal{B} . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $q > 0$, esto es, $q(x) > 0$ para todo $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- (b) todos los menores principales de $q_{\mathcal{B}}$ son positivos:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} \quad \delta_I(q_{\mathcal{B}}) > 0.$$

- (c) todos los menores de esquina de la matriz $q_{\mathcal{B}}$ son positivos: para todo $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta_k(q_{\mathcal{B}}) > 0.$$

Idea de la demostración. Las demostraciones están escritas en otro archivo; aquí solamente indicamos las ideas. La demostración de la implicación (a) \Rightarrow (b) está basada en dos lemas. El primer lema dice que si una forma cuadrática es positiva definida, entonces el determinante de su matriz asociada es positivo. El segundo lema dice que la matriz asociada a la forma cuadrática restringida al subespacio generado por los primeros k vectores de la base es la submatriz $k \times k$ ubicada en la esquina de la matriz asociada original.

La implicación (b) \Rightarrow (c) es trivial, pues todo menor de esquina es un menor principal.

La demostración de la implicación (c) \Rightarrow (a) utiliza el método de Jacobi (o sea el método matricial) de diagonalización de formas cuadráticas. \square

Criterios para que $q < 0$, $q \geq 0$, $q \leq 0$, $q \geq 0$

En todas las proposiciones que siguen se supone que V es un espacio vectorial real de dimensión finita n ($n \geq 1$), \mathcal{B} es una base de V .

7. Proposición (criterio para que $q < 0$). Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $q < 0$, esto es, $q(x) < 0$ para todo $x \in V \setminus \{0\}$.
- (b) en la matriz $q_{\mathcal{B}}$ todos los menores de esquina de órdenes impares son negativos y todos los menores de esquina de órdenes pares son positivos:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{sgn}(\Delta_k(q_{\mathcal{B}})) = (-1)^k.$$

- (c) en la matriz $q_{\mathcal{B}}$ todos los menores principales de órdenes impares son negativos y todos los menores de esquina de órdenes pares son positivos:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} \quad \text{sgn}(\delta_I(q_{\mathcal{B}})) = (-1)^{|I|}.$$

Idea de la demostración. Aplicar el teorema anterior a la forma cuadrática $-q$. □

8. Nota. En una matriz cuadrada de orden 3 los menores principales de órdenes impares son $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_{1,2,3}$, y los menores principales de órdenes pares son $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3}$.

9. Proposición (criterio para que $q \geq 0$). Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $q \geq 0$, esto es, $q(x) \geq 0$ para todo $x \in V$.
- (b) todos los menores principales de la matriz $q_{\mathcal{B}}$ son no negativos:

$$\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} \quad \delta_I(q_{\mathcal{B}}) \geq 0.$$

Idea de la demostración. Todos los menores principales de la matriz $q_{\mathcal{B}}$ son no negativos si y sólo si todos los menores principales de la matriz $q_{\mathcal{E}} + \delta I_n$ son positivos para $\delta > 0$. Aplicar el criterio de Sylvestre a $q_{\mathcal{B}} + \delta I_n$ y pasar al límite cuando $\delta \rightarrow 0$. □

10. Ejercicio ($q \leq 0$). Enuncie el criterio para que $q \leq 0$.

11. Proposición (criterio para que $q \geq 0$). Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $q \geq 0$, esto es, existen vectores $x, y \in V$ tales que $q(x) > 0$, $q(y) < 0$.
- (b) se cumple al menos una de las siguientes condiciones:
 - (i) en la matriz $q_{\mathcal{B}}$ por lo menos uno de los menores de órdenes pares es negativo;
 - (ii) en la matriz $q_{\mathcal{B}}$ entre los menores de los órdenes impares hay menores de signos diferentes (uno positivo y otro negativo).

Idea de la demostración. La afirmación $q \geq 0$ significa que $q \not\leq 0$ y $q \not\leq 0$. □

Ejemplos

12. Ejemplo. La forma cuadrática q está dada por su matriz $q_{\mathcal{E}}$ en la base canónica \mathcal{E} . Calcular todos los menores principales de la matriz $q_{\mathcal{E}}$. Usando los criterios de Sylvester determinar cuál de las siguientes opciones tiene caso: $q > 0$, $q < 0$, $q \geq 0$, $q \leq 0$, $q \gtrsim 0$. Para la comprobación diagonalizar q (sin calcular la matriz de cambio) y calcular sus índices de inercia.

$$q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculamos los menores de esquina de la matriz $q_{\mathcal{E}}$:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Las condiciones de los casos $q > 0$ y $q < 0$ no se cumplen. Como uno de los menores principales de orden impar es positivo ($\Delta_1 = 1 > 0$), podemos rechazar la opción $q \leq 0$. Se quedan dos opciones: $q \geq 0$ o $q \gtrsim 0$, y hasta ahora no tenemos suficiente información para elegir una de ellas. Hay que calcular no sólo los menores de esquina (en otras palabras, los menores principales líderes), sino todos los menores principales de la matriz $q_{\mathcal{E}}$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 = 1, & \delta_2 &= 12, & \delta_3 &= 4, \\ \Delta_2 &= \delta_{1,2} = 3, & \delta_{1,3} &= 3, & \delta_{2,3} &= 12, \\ \Delta_3 &= \delta_{1,2,3} = 0. \end{aligned}$$

Todos los menores principales son no negativos y algunos de ellos son nulos.

Respuesta: $q \geq 0$ (q es degenerada no negativa, esto es, pseudopositiva).

Para la comprobación diagonalicemos la forma q y calculemos sus índices de inercia:

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 12x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - 3x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 \\ &= y_1^2 + 3y_2^2. \end{aligned}$$

De allí $r_+(q) = 2$, $r_-(q) = 0$, por eso $q \geq 0$. □

13. Ejemplo.

$$q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución. Menores de esquina de la matriz $q_{\mathcal{E}}$:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 12.$$

En este ejemplo es suficiente sólo calcular los menores de esquina. Ya sabemos que entre los menores principales de órdenes pares hay menores negativos ($\Delta_2 = -1 < 0$), por eso son imposibles los casos $q \geq 0$ ni $q \leq 0$.

Respuesta: $q \not\geq 0$ (q es indefinida).

Para la comprobación diagonalicemos la forma q (esta vez usemos el método matricial) y calculemos sus índices de inercia.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\substack{C_1 += C_2 \\ R_1 += R_2}]{\substack{C_2 += -\frac{1}{2}C_1 \\ C_3 += -\frac{5}{2}C_1 \\ R_2 += -\frac{1}{2}R_1 \\ R_3 += -\frac{5}{2}R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{C_3 += -C_2 \\ R_3 += -R_2}]{\substack{C_3 += -C_2 \\ R_3 += -R_2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{25}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De allí $r_+(q) = 1$, $r_-(q) = 2$, $q \not\geq 0$. □

14. Ejemplo.

$$q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero calculemos los menores de esquina:

$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta_2 = 2 > 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Como $\Delta_1 < 0$, podemos dejar el caso $q \geq 0$. Como $\Delta_3 = 0$, no se cumplen las condiciones para $q < 0$. Pero se quedan dos casos posibles: $q \leq 0$ y $q \geq 0$. Hay que calcular todos los menores principales.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta_1 = -1 < 0, & \delta_2 &= -6 < 0, & \delta_3 &= -3 < 0, \\ \delta_{1,2} &= \Delta_2 = 2 > 0, & \delta_{1,3} &= 2 > 0, & \delta_{2,3} &= 2 > 0, \\ \delta_{1,2,3} &= \Delta_3 = 0. \end{aligned}$$

Todos los menores principales de órdenes impares son ≤ 0 , y todos los menores principales de órdenes pares (de orden 2) son ≥ 0 . Por uno de los teoremas, $q \leq 0$. Como ya sabemos que $q \not\leq 0$, concluimos que $q \leq 0$.

Respuesta: $q \leq 0$ (q es degenerada no positiva).

Para la comprobación diagonalicemos la forma q y calculemos sus índices de inercia.

$$\begin{aligned} q(x) &= -x_1^2 - 6x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 \\ &= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 \\ &= -y_1^2 - 2y_2^2. \end{aligned}$$

De allí $r_+(q) = 0$, $r_-(q) = 2$, $q \leq 0$. □