Matrices pseudoescalonadas y pseudoescalonadas reducidas

Objetivos. Seguimos estudiando la eliminación de Gauss-Jordan. En algunos casos es incómodo elegir elementos pivotes en las primeras columnas. Las matrices pseudoescalonadas y pseudoescalonadas reducidas se obtienen con los algoritmos de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan si los elementos pivotes se eligen en columnas arbitrarias.

1. Ejemplo. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 3; \\ 3x_1 & + & 13x_2 & + & 8x_3 & = & 14; \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 7x_3 & = & -5. \end{array}\right.$$

Primera solución. Elijamos los elementos pivotes en las primeras dos columnas para transformar la matriz a forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 13 & 8 & 14 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 -= R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 10 & 3 & 11 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 -= 3R_1]{R_2 -= 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 10 & 3 & 11 \\ 0 & -17 & -1 & -19 \\ 0 & -34 & -2 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= -\frac{1}{17}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 10 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{19}{17} \\ 0 & -34 & -2 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += 34R_2]{R_1 -= 10R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{41}{17} & -\frac{3}{17} \\ 0 & 1 & \frac{1}{17} & \frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Solución general:

$$x = \left[-\frac{41}{17}x_3 - \frac{3}{17},\ -\frac{1}{17}x_3 + \frac{19}{17},\ x_3\right]^\top. \qquad \square$$

Segunda solución. Elijamos los elementos pivotes en la primera y la tercera columna:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 13 & 8 & 14 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 10 & 3 & 11 \\ 0 & -17 & -1 & -19 \\ 0 & -34 & -2 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 *= (-1)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 10 & 3 & 11 \\ 0 & 17 & 1 & 19 \\ 0 & -34 & -2 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += 2R_2]{R_1 -= 3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -41 & 0 & -46 \\ 0 & 17 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De allí

$$x = [41x_2 - 46, x_2, -17x_2 + 19]^\top.$$

Resumen: la forma de la solución general depende de la elección de elementos pivotes. Eligiendo pivotes en columnas apropiadas, a veces logramos simplificar la forma de la solución general. $\square$

2. Definición (matriz pseudoescalonada). Un matriz A se llama *pseudoescalonada* (o más precisamente *pseudoescalona por renglones*), si en cada renglón no nulo hay una entrada no nula tal que todas las entradas debajo de esta son cero.

3. Ejemplos de matrices pseudoescalonadas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Definición (matriz pseudoescalonada reducida). Una matriz A se llama *pseudoescalonada reducida* (o más precisamente *pseudoescalona reducida por renglones*), si en cada renglón no nulo hay una entrada igual a 1 tal que todas las demás entradas de su columna son cero.

5. Ejemplos de matrices pseudoescalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, reduciendo la matriz aumentada del sistema a forma pseudoescalonada:

6. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales al transformar la matriz del sistema a forma pseudoescalonada reducida (aquí es conveniente elegir los pivotes en las columnas 3 y 4).

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 3x_4 & = & -6; \\ 3x_1 & + & 13x_2 & - & 17x_3 & - & 10x_4 & = & -20; \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2. \end{array} \right.$$

7. Ejemplo.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0; \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 0; \\ 3x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

8. Promesa para futuro. Más adelante, estudiando la independencia lineal y el rango, vamos a demostrar que los renglones no nulos de una matriz pseudoescalona son *linealmente independientes*.