Demostraciones de divisibilidad por inducción matemática

(ejemplo y ejercicios)

Vamos a denotar por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros positivos:

$$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z}: \ n \geqslant 1\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

1. Lema. Denotemos por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a la sucesión de números enteros

$$x_n = 15^n + 6.$$

Entonces $7 \mid (x_{n+1} - x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Notamos que

$$x_{n+1} - x_n = (15^{n+1} + 6) - (15^n + 6) = 15^{n+1} - 15^n = 15^n(15 - 1) = 14 \cdot 15^n = 7 \cdot 2 \cdot 15^n.$$

Como $2 \cdot 15^n \in \mathbb{Z}$, hemos demostrado que $x_{n+1} - x_n$ es un múltiplo entero de 7. $\square$

2. Teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$7 \mid (15^n + 6).$$

Demostración. Denotemos por A al conjunto de los números enteros positivos que satisfacen la condición que tenemos por demostrar:

$$B := \{n \in \mathbb{N}: \quad 7 \mid x_n\}.$$

Probemos la *base de inducción*, esto es, verificamos que $1 \in B$:

$$x_1 = 15^1 + 6 = 21 = 7 \cdot 3.$$

Probemos el *paso de inducción*. Supongamos que $n \in B$ (es la *hipótesis de inducción*) y demostremos que $n + 1 \in B$.

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + x_n.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que $7 \mid x_n$. Por el Lema tenemos que $7 \mid (x_{n+1} - x_n)$. De aquí se sigue que $7 \mid x_{n+1}$. Hemos demostrado que $n + 1 \in B$.

Como $1 \in B$ y para cada n entero positivo perteneciente al conjunto B el número $n+1$ también pertenece al conjunto B, el principio de inducción matemática dice que B es el conjunto de todos los números enteros positivos. $\square$

3. Lema. Denotemos por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a la sucesión de números enteros definida mediante la regla $x_n = 25^n + 5$. Entonces $6 \mid (x_{n+1} - x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

$$x_{n+1} - x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 6 \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot 25^n.$$

Como $\underbrace{\qquad\quad}_{?} \in \mathbb{Z}$, hemos demostrado que $6 \mid (x_{n+1} - x_n)$. □

4. Teorema. $6 \mid (25^n + 5)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como en el lema anterior, denotamos $25^n + 5$ por x_n. Procedemos por inducción matemática sobre n. Denotemos por B al conjunto de los números $n \in \mathbb{N}$ para los cuales se cumple la afirmación deseada:

$$B := \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \right\}.$$

Base de inducción. $\quad x_1 = \underbrace{\qquad}_{?} = 6 \cdot \underbrace{\qquad}_{?}$, así que $6 \mid x_1$ y $1 \in \underbrace{\qquad}_{?}$.

Paso de inducción. supongamos que $n \in B$ (esto es, $6 \mid \underbrace{\qquad}_{?}$) y demostremos que $n + 1 \in B$ (esto es, $6 \mid \underbrace{\qquad}_{?}$). Notamos que $x_{n+1} = \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\Big) + \underbrace{\qquad}_{?}$.

Mostramos la lógica con flechitas en el siguiente diagrama (dibujar dos flechas):

6 divide al primer sumando	por la hipótesis de inducción
6 divide al segundo sumando	por el lema anterior

Ambos sumandos son múltiplos de 6, por eso la suma también: $6 \mid \underbrace{\qquad}_{?}$.

Por la definición del conjunto B, esto significa que $\underbrace{\qquad}_{?} \in B$.

Resulta que B es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que tiene las siguientes dos propiedades: Hemos demostrado dos cosas:

- $1 \in B$;
- si $n \in B$, entonces $n + 1 \in B$.

Por el principio de inducción matemática, $B = \mathbb{N}$. □