# Ejemplo de una proyección en $\mathbb{R}^3$

**Objetivos.** Estudiar un ejemplo de una transformación lineal tal que $P^2 = P$.

**1. Definición (operador idempotente, proyección).** Un operador lineal $P\colon V \to V$ se llama *idempotente* o *proyección* si $P^2 = P$.

**2. Ejemplo.** En todos los ejercicios de este tema vamos a estudiar la transformación lineal $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por su matriz asociada respecto a la base canónica $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix}.$$

**3. Propiedad idempotente.** Verificar que $P^2 = P$. Se dice que $P$ es un *operador idempotente* o una *proyección.*

*Solución.* Calculamos $(P^2)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned}(P^2)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+6-6 & 0-10+12 & 0+6-7 \\ 0-15+18 & 6+25-36 & -3-15+21 \\ 0-36+42 & 12+60-84 & -6-36+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar que $(P^2)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}$. Como la correspondencia entre operadores lineales y sus matrices asociadas (respecto a una base fija) es biyectiva, de aquí sigue que $P^2 = P$. $\square$

**4. Construcción de bases de la imagen y del núcleo de $\boldsymbol{P}$.** Construir una base $\mathcal{A}$ de $\operatorname{im}(P)$ y una base $\mathcal{B}$ de $\ker(P)$. Hacer las comprobaciones.

*Solución.* Transformamos la matriz $P_{\mathcal{E}}$ en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= -1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += -7R_1]{R_2 += -3R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += -2R_2]{R_1 += 2R_2} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como los pivotes están en las columnas 2 y 3, una base de la imagen de $P$ está formada por la segunda y tercera columnas de la matriz $P_{\mathcal{E}}$:

$$\mathcal{A} = (a_1, a_2), \qquad \text{donde} \qquad a_1 = P(e_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = P(e_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que el vector $P(e_1)$, es decir, la primera columna de $P_{\mathcal{E}}$, es una combinación lineal de $a_1$ y $a_2$:

$$3a_1 + 6a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \\ -36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = P(e_1). \quad \checkmark$$

Escribimos la solución general del sistema de ecuaciones $P_{\mathcal{E}} x = \mathbf{0}_3$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ -6x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

De aquí obtenemos una base de $\ker(P)$:

$$\mathcal{B} = (b_1), \qquad \text{donde} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $b_1 \in \ker(P)$:

$$(Pb_1)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}} b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+6 \\ 3+15-18 \\ 6+36-42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Al final notamos que se cumple la relación entre el rango y la nulidad:

$$\operatorname{r}(P) + \operatorname{nul}(P) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3). \quad \checkmark$$

$\square$

**5. Proyección complementaria $\boldsymbol{Q = I - P}$ y sus propiedades.** Sea $Q = I - P$. Calcular la matriz $Q_{\mathcal{E}}$. Calcular $Q^2$, $PQ$ y $QP$ multiplicando las matrices asociadas correspondientes.

*Solución.*

$$Q_{\mathcal{E}} = (I - P)_{\mathcal{E}} = I_3 - P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculamos $(Q^2)_{\mathcal{E}}$:

$$(Q^2)_{\mathcal{E}} = Q_{\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6-6 & -2-12+12 & 1+6-6 \\ -3-18+18 & 6+36-36 & -3-18+18 \\ -6-36+36 & 12+72-72 & -6-36+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} = Q_{\mathcal{E}}.$$

Calculamos $(PQ)_{\mathcal{E}}$:

$$(PQ)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-6+6 & 0+12-12 & 0-6+6 \\ 3+15-18 & -6-30+36 & 3+15-18 \\ 6+36-42 & -12-72+84 & 6+36-42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3,3}.$$

Calculamos $(QP)_{\mathcal{E}}$:

$$(QP)_{\mathcal{E}} = Q_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-6+6 & 2+10-12 & -1-6+7 \\ 0+18-18 & -6-30+36 & 3+18-21 \\ 0+36-36 & -12-60+72 & 6+36-42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3,3}.$$

Como la corresponcia entre los operadores lineales y las matrices asociadas (respecto a una base fija) es biyectiva, concluimos que

$$Q^2 = Q, \qquad PQ = \mathbf{0}, \qquad QP = \mathbf{0}. \qquad \square$$

**6. Construcción de bases en im($Q$) y en ker($Q$).** Construir una base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{im}(Q)$ y una base $\mathcal{D}$ de $\ker(Q)$.

*Solución.* Aplicando operaciones elementales transformamos la matriz $Q_{\mathcal{E}}$ en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$Q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= 6R_1]{R_2 \mathrel{+}= 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base de $\operatorname{im}(Q)$ está formada por la primera columna de $Q_{\mathcal{E}}$:

$$\mathcal{C} = (c_1), \qquad \text{donde} \qquad c_1 = Q(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $Q(e_2)$ y $Q(e_3)$ son múltiplos de $c_1$:

$$-2c_1 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = Q(e_2), \quad \checkmark$$

$$1c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = Q(e_3). \quad \checkmark$$

Construimos la solución general del sistema de ecuaciones $Q_{\mathcal{E}}x = \mathbf{0}_3$:

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una base de $\ker(Q)$ es

$$\mathcal{D} = (d_1, d_2), \qquad \text{donde} \qquad d_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad d_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $d_1, d_2 \in \ker(Q)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2 + 0 & -1 + 0 + 1 \\ -6 + 6 + 0 & 3 + 0 - 3 \\ -12 + 12 + 0 & 6 + 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Notamos que $\operatorname{r}(Q) + \operatorname{nul}(Q) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^3)$. $\square$

**7. Relación entre $\mathbf{im}(P), \mathbf{ker}(P), \mathbf{im}(Q), \mathbf{ker}(Q)$.** Mostrar que los vectores de $\mathcal{C}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa. Muestre que los vectores de $\mathcal{D}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{A}$ y viceversa.

*Solución.* Recordamos que $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ es una base de $\operatorname{im}(P)$ y $\mathcal{B} = (b_1)$ es una base de $\ker(P)$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad\qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Recordamos que $\mathcal{C} = (c_1)$ es una base de $\operatorname{im}(Q)$ y $\mathcal{D} = (d_1, d_2)$ es una base de $\ker(Q)$:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \qquad\qquad d_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es obvio que $c_1 = b_1$. En general $c_1$ podría ser un múltiplo no nulo de $b_1$.

Vamos a demostrar que $d_1$ y $d_2$ son combinaciones lineales de $a_1$ y $a_2$. Formamos una matriz de los vectores $a_1, a_2, d_1, d_2$ y la transformamos en una matriz pseudoescalonada reducida eligiendo pivotes en la primera y segunda columna:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \mathrel{*}= -1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -7R_1]{R_2 \mathrel{+}= -3R_1}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 14 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -2R_2]{R_1 \mathrel{+}= R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12 & -5 \\ 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí sigue que

$$d_1 = 7a_1 + 12a_2, \qquad d_2 = -3a_1 - 5a_2.$$

Comprobación:

$$7a_1 + 12a_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -35 \\ -84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 36 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1; \quad \checkmark$$

$$-3a_1 - 5a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \\ 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = d_2. \quad \checkmark$$

Ahora vamos a mostrar que $a_1$ y $a_2$ son combinaciones lineales de $d_1$ y $d_2$. Formamos una matriz de estos cuatro vectores y la transformamos en una matriz pseudoescalonada reducida eligiendo pivotes en las columnas correspondientes a los vectores $d_1$ y $d_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += -2R_2} \begin{bmatrix} 12 & -7 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí vemos que

$$a_1 = -5d_1 - 12d_2, \qquad a_2 = 3d_1 + 7d_2.$$

Comprobación:

$$-5d_1 - 12d_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix} = a_1; \quad \checkmark$$

$$3d_1 + 7d_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = a_2. \quad \checkmark$$

Conclusión:

$$\operatorname{im}(P) = \ell(a_1, a_2) = \ell(d_1, d_2) = \ker(Q), \qquad \ker(P) = \ell(b_1) = \ell(c_1) = \operatorname{im}(Q).$$

La imagen de $P$ es el núcleo de $Q$, y viceversa. $\square$

**8. Descomposición de un vector $\boldsymbol{v}$ en la suma $\boldsymbol{P(v)+Q(v)}$.** Sea

$$v=\begin{bmatrix}5\\4\\8\end{bmatrix}.$$

Calcular $u=P(v)$ y $w=Q(v)$. Comprobar directamente que

$$u+w=v,\qquad u\in\ker(Q),\qquad w\in\ker(P).$$

*Solución.* Calculamos $u$ y $w$:

$$u=u_{\mathcal{E}}=P_{\mathcal{E}}v_{\mathcal{E}}=P_{\mathcal{E}}v=\begin{bmatrix}0&2&-1\\3&-5&3\\6&-12&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+8-8\\15-20+24\\30-48+56\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\19\\38\end{bmatrix}.$$

$$w=w_{\mathcal{E}}=Q_{\mathcal{E}}v_{\mathcal{E}}=Q_{\mathcal{E}}v=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-3&6&-3\\-6&12&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-8+8\\-15+24-24\\-30+48-48\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-15\\-30\end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $u+w=v$, $u\in\ker(Q)$, $w\in\ker(P)$:

$$u+w=\begin{bmatrix}0\\19\\38\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\-15\\-30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\8\end{bmatrix}=v;\quad\checkmark$$

$$(Qu)_{\mathcal{E}}=Q_{\mathcal{E}}u=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-3&6&-3\\-6&12&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\19\\38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-38+38\\0+114-114\\0+228-228\end{bmatrix}=\mathbf{0}_3;\quad\checkmark$$

$$(Pw)_{\mathcal{E}}=P_{\mathcal{E}}w=\begin{bmatrix}0&2&-1\\3&-5&3\\6&-12&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-15\\-30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-30+30\\15+75-90\\30+180-210\end{bmatrix}=\mathbf{0}_3.\quad\checkmark\qquad\square$$

**9. Formar una base de $\mathbb{R}^3$ de las bases de im$(P)$ y ker$(P)$.** Denotemos por $\mathcal{F}$ a la lista de vectores que se obtiene al juntar las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\operatorname{im}(P)$ y de $\ker(P)$. Escribir la matriz de transición de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ (puede denotarla por $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$), calcular su inversa y hacer la comprobación.

*Solución.* Recordamos que $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ y $\mathcal{B} = (b_1)$, donde

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $\mathcal{F} = (a_1, a_2, b_1)$ y la matriz de transición es

$$U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \big[(a_1)_{\mathcal{E}}, (a_2)_{\mathcal{E}}, (b_1)_{\mathcal{E}}\big] = \big[a_1, a_2, b_1\big] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ -12 & 7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculamos su matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -12 & 7 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \mathrel{+}= 6R_1 \\ R_2 \mathrel{+}= 3R_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= -2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ -12 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 - 5 + 0 & -3 + 3 + 0 & 3 - 3 + 0 \\ 12 + 0 - 12 & -6 + 0 + 7 & 6 + 0 - 6 \\ 2 + 10 - 12 & -1 - 6 + 7 & 1 + 6 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

**10.** Calcular las matrices $P_{\mathcal{F}}$ y $Q_{\mathcal{F}}$ asociadas a los operadores $P$ y $Q$ respecto a la base $\mathcal{F}$ del ejercicio anterior.

*Solución.* Para calcular $P_{\mathcal{F}}$ usamos la fórmula $P_{\mathcal{F}} = U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}} U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}
U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+3+0 & 6-5+0 & -3+3+0 \\ 0+0+6 & 12+0-12 & -6+0+7 \\ 0-6+6 & 2+10-12 & -1-6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{E}} = (U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}}) U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ -12 & 7 & -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6-5+0 & -3+3+0 & 3-3+0 \\ 12+0-12 & -6+0+7 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Para calcular $Q_{\mathcal{F}}$ usamos la fórmula $Q_{\mathcal{F}} = U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}} U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}
U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3-3+0 & -6+6+0 & 3-3+0 \\ 6+0-6 & -12+0+12 & 6+0-6 \\ 1+6-6 & -2-12+12 & 1+6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{F}} = (U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}}) U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ -12 & 7 & -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 2+10-12 & -1-6+7 & 1+6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Respuesta:

$$P_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}(1,1,0), \qquad Q_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}(0,0,1). \qquad \square$$

**11. Relaciones entre $\boldsymbol{P_{\mathcal{F}}}$ y $\boldsymbol{Q_{\mathcal{F}}}$.** Verificar que

$$P_{\mathcal{F}} + Q_{\mathcal{F}} = I_3, \qquad P_{\mathcal{F}}^2 = P_{\mathcal{F}}, \qquad Q_{\mathcal{F}}^2 = Q_{\mathcal{F}}, \qquad P_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}_{3,3}, \qquad Q_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}_{3,3}.$$

*Solución.*

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{F}} + Q_{\mathcal{F}} &= \operatorname{diag}(1,1,0) + \operatorname{diag}(0,0,1) = \operatorname{diag}(1,1,1) = I_3 \\
P_{\mathcal{F}}^2 &= \operatorname{diag}(1^2,1^2,0^2) = \operatorname{diag}(1,1,0) = P_{\mathcal{F}}, \\
Q_{\mathcal{F}}^2 &= \operatorname{diag}(0^2,0^2,1^2) = \operatorname{diag}(0,0,1) = Q_{\mathcal{F}}, \\
P_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}} &= \operatorname{diag}(1\cdot 0, 1\cdot 0, 0\cdot 1) = \operatorname{diag}(0,0,0) = \mathbf{0}_{3,3}, \\
Q_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}} &= \operatorname{diag}(0\cdot 1, 0\cdot 1, 1\cdot 0) = \operatorname{diag}(0,0,0) = \mathbf{0}_{3,3}.
\end{aligned}$$

□