

Producto de matrices triangulares superiores

Ejercicios

Objetivos. Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. Deducir una fórmula para las entradas diagonales del producto. Deducir fórmulas para las entradas por arriba de la diagonal principal.

Requisitos. Definición del producto de matrices, notación breve para las sumas, partición de una suma.

Entradas diagonales de una matriz cuadrada, entradas por arriba y por abajo de la diagonal

Diagonal principal de una matriz cuadrada. En la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ están marcadas las entradas pertenecientes a *diagonal principal*:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Parte estrictamente superior de una matriz. En la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ están marcadas las entradas ubicadas en la *parte estrictamente superior* (= *estrictamente superior derecha*), es decir, *por arriba de la diagonal principal*:

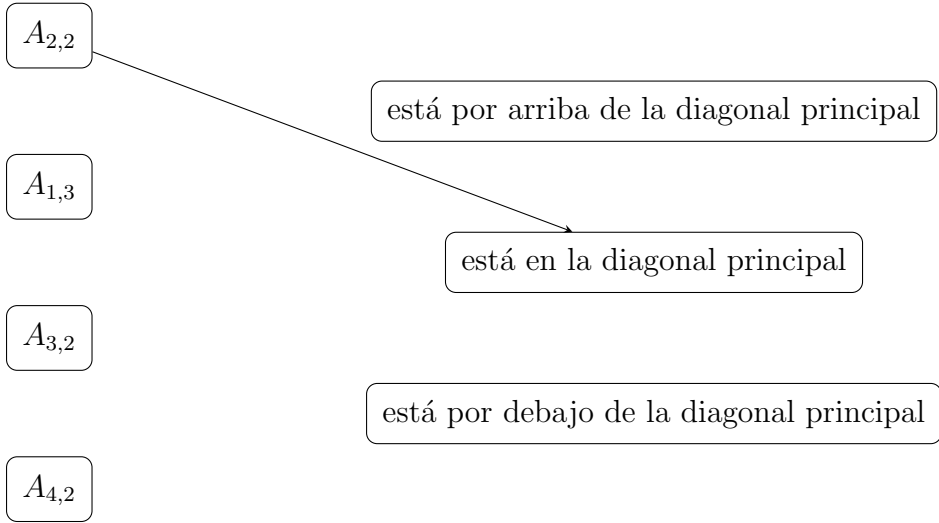
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}.$$

1. Parte estrictamente inferior de una matriz. Marque la *parte estrictamente inferior* (= *estrictamente inferior izquierda*) de la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. En otras palabras, marque las entradas ubicadas por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}.$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Para cada una de las siguientes entradas de A determine su ubicación y dibuje flechitas correspondientes:

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$



3. **Diagonal principal, parte superior derecha y parte inferior izquierda de una matriz cuadrada (definición formal).** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para cada una de las siguientes entradas de A determine su ubicación:

$A_{i,j}, i < j$ → está en la diagonal principal

$A_{i,j}, i = j$ → está por arriba de la diagonal principal

$A_{i,j}, i > j$ → está por debajo de la diagonal principal

Definición de matrices triangulares superiores e inferiores

Definición: la diagonal principal de una matriz cuadrada. Sea A una matriz cuadrada, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La *diagonal principal* de A consiste de las entradas $A_{i,i}$, donde $i \in \{1, \dots, n\}$. También se dice que $A_{i,i}$, donde $i \in \{1, \dots, n\}$, son *entradas diagonales* o *elementos diagonales* de la matriz A .

4. Descripción formal de las entradas en la diagonal principal, fuera de la diagonal principal, por arriba y por abajo de la diagonal principal.

$A_{i,j}$ está en la diagonal principal $\iff i = j$.

$A_{i,j}$ está fuera de la diagonal principal \iff $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

$A_{i,j}$ está por arriba de la diagonal principal \iff $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

Definición de las matrices diagonales. El conjunto de las matrices diagonales reales de orden n consiste de las matrices reales de orden n cuyas entradas fuera de la diagonal principal son nulas:

$$\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A_{i,j} = 0 \text{ para todos } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que } i \neq j \right\}.$$

Más formalmente:

$$\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ si } i \neq j, \text{ entonces } A_{i,j} = 0 \right\}.$$

5. Definición de las matrices triangulares superiores y triangulares inferiores.

Escriba las definiciones formales de matrices triangulares superiores y triangulares inferiores:

$$\text{ut}_n(\mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ si } \underbrace{\hspace{2cm}}, \text{ entonces } A_{i,j} = 0 \right\}.$$

$$\text{lt}_n(\mathbb{R}) :=$$

6. Relación entre matrices triangulares superiores y triangulares inferiores.

Denotemos por A^T a la matriz transpuesta de A .

$$A \in \text{lt}_n(\mathbb{R}) \iff A^T \in \underbrace{\hspace{2cm}}_?$$

Producto de matrices triangulares superiores en el caso particular $n = 3$

7. Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} \\ 0 & 0 & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Calcule el producto AB .

Solución. Escribamos el producto (llene todas las entradas):

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1}+A_{1,3}B_{3,1} & & \\ & & \\ & & A_{3,1}B_{1,2}+A_{3,2}B_{2,2}+A_{3,3}B_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Notamos que algunos de los factores son nulos:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}\cdot 0+A_{1,3}\cdot 0 & & \\ & & \\ & & 0\cdot B_{1,2}+0\cdot B_{2,2}+A_{3,3}\cdot 0 \end{bmatrix}.$$

Quitando los sumandos nulos obtenemos la respuesta final:

$$AB = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

□

8. Observaciones acerca de la matriz AB .

- Las entradas por debajo de la diagonal principal son ... así que la matriz AB es ...
- Por arriba de la diagonal principal algunas sumas se reducen gracias a los sumandos nulos.
- En la diagonal principal la (i, i) -ésima entrada es igual a ...

Entradas del producto por debajo de la diagonal principal en el caso particular $n = 6$

En los siguientes ejercicios se consideran dos matrices triangulares superiores A y B de orden 6 con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} & A_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} & A_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{6,6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} & B_{1,6} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} & B_{2,6} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} & B_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} & B_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} & B_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{6,6} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. Calcular la entrada $(AB)_{4,2}$ del producto AB .

Solución. Por la definición del producto de matrices, la entrada de la matriz AB con índices $(4, 2)$ es el producto punto del cuarto renglón de A por la segunda columna de B :

$$(AB)_{4,2} = A_{4,1}B_{1,2} + A_{4,2}B_{2,2} + A_{4,3}B_{3,2} + A_{4,4}B_{4,2} + A_{4,5}B_{5,2} + A_{4,6}B_{6,2}.$$

Indicamos los factores nulos y simplificamos la suma:

$$(AB)_{4,2} = \underbrace{A_{4,1}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{porque} \\ 4>1}} B_{1,2} + \underbrace{A_{4,2}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (4>2)}} B_{2,2} + \underbrace{A_{4,3}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (4>3)}} \underbrace{B_{3,2}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (3>2)}} + \underbrace{A_{4,4}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (4>2)}} B_{4,2} + \underbrace{A_{4,5}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (5>2)}} B_{5,2} + \underbrace{A_{4,6}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (6>2)}} B_{6,2} = 0.$$

□

Calcule las siguientes entradas del producto AB :

9. $(AB)_{4,1} = A_{4,1}B_{1,1} + A_{4,2}B_{2,1} + A_{4,3}B_{3,1} + A_{4,4}B_{4,1} + A_{4,5}B_{5,1} + A_{4,6}B_{6,1} =$

10. $(AB)_{5,2} =$

11. $(AB)_{6,4} =$

Entradas diagonales del producto en el caso particular $n = 6$

Seguimos estudiando el producto de matrices triangulares superiores para el caso particular de matrices 6×6 :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} & A_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} & A_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{6,6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} & B_{1,6} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} & B_{2,6} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} & B_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} & B_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} & B_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{6,6} \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos las entradas diagonales del producto AB .

Ejemplo. Calcular la entrada $(AB)_{3,3}$ del producto AB .

Solución.

$$(AB)_{3,3} = \underbrace{A_{3,1}}_0 B_{1,3} + \underbrace{A_{3,2}}_0 B_{2,3} + A_{3,3} B_{3,3} + \underbrace{A_{3,4}}_0 B_{4,3} + \underbrace{A_{3,5}}_0 B_{5,3} + \underbrace{A_{3,6}}_0 B_{6,3} = A_{3,3} B_{3,3}.$$

$(3>1)$ $(3>2)$ $(4>3)$ $(5>3)$ $(6>3)$

Respuesta: $(AB)_{3,3} = A_{3,3} B_{3,3}$. □

Calcule las siguientes entradas del producto AB :

12. $(AB)_{2,2} =$

13. $(AB)_{5,5} =$

Entradas del producto por arriba de la diagonal principal en el caso particular $n = 6$

Seguimos estudiando el producto de matrices triangulares superiores para el caso particular de matrices 6×6 :

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} & A_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} & A_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{6,6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} & B_{1,6} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} & B_{2,6} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} & B_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & B_{4,4} & B_{4,5} & B_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{5,5} & B_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{6,6} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. Calcular $(AB)_{2,4}$.

Solución.

$$(AB)_{2,4} = \underbrace{A_{2,1}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (2>1)}} B_{1,4} + A_{2,2} B_{2,4} + A_{2,3} B_{3,4} + A_{2,4} B_{4,4} + \underbrace{A_{2,5}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (5>4)}} \underbrace{B_{5,4}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (6>4)}} + \underbrace{A_{2,6}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (6>4)}} \underbrace{B_{6,4}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (6>4)}}.$$

De los seis sumandos se quedaron sólo tres:

$$(AB)_{2,4} = A_{2,2} B_{2,4} + A_{2,3} B_{3,4} + A_{2,4} B_{4,4} = \sum_{k=2}^4 A_{2,k} B_{k,4}. \quad \square$$

Calcule las siguientes entradas del producto AB . Primero escriba todos los sumandos, luego indique factores nulos y simplifique las sumas.

14. $(AB)_{4,5} =$

15. $(AB)_{3,6} =$

Vamos a generalizar los resultados de los ejercicios anteriores al caso de matrices triangulares superiores de orden n . Necesitamos repasar la definición formal del producto de matrices y una propiedad de las sumatorias.

Fórmula general para las entradas del producto de matrices

En los siguientes ejercicios se consideran matrices cuadradas A y B del mismo tamaño, no necesariamente triangulares superiores, y se pide escribir las fórmulas para su entradas de dos maneras diferentes: 1) con puntitos \dots ; 2) con el símbolo de suma \sum .

Ejemplo. Si $A, B \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$, entonces

$$(AB)_{2,5} = A_{2,1}B_{1,5} + A_{2,2}B_{2,5} + A_{2,3}B_{3,5} + \dots + A_{2,7}B_{7,5} + A_{2,8}B_{8,5} = \sum_{k=1}^8 A_{2,k}B_{k,5}.$$

16. Sean $A, B \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. Entonces

$$(AB)_{6,2} =$$

17. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$. Entonces

$$(AB)_{11,8} =$$

18. Fórmula general escrita con puntitos.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$(AB)_{i,j} = \quad + \quad + \quad \dots \quad + \quad + \quad .$$

19. Fórmula general escrita con \sum .

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=}$$

Partición de una suma

Ejemplo. A veces es cómodo dividir una suma en dos partes. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^5 d_k = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = (d_1 + d_2) + (d_3 + d_4 + d_5) = \sum_{k=1}^2 d_k + \sum_{k=3}^5 d_k.$$

20.
$$\sum_{k=1}^{18} d_k = \sum_{k=1}^5 d_k + \sum_{k=6}^{18} d_k.$$

Ejemplo.
$$\sum_{k=1}^{30} d_k = \sum_{k=1}^7 d_k + \sum_{k=8}^{21} d_k + \sum_{k=22}^{30} d_k.$$

21.
$$\sum_{k=1}^{27} d_k = \sum_{k=1}^8 d_k + \sum_{k=9}^{25} d_k + \sum_{k=26}^{27} d_k.$$

Ejemplo. Supongamos que $d_k = 4 \quad \forall k \in \{1, \dots, 5\}$ y $d_k = 7 \quad \forall k \in \{6, \dots, 15\}$.
Entonces

$$\sum_{k=1}^{15} d_k = \sum_{k=1}^5 \underbrace{d_k}_{\parallel 4} + \sum_{k=6}^{15} \underbrace{d_k}_{\parallel 7} = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 7 = 90.$$

22. Sean $d_k = 2 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\}$ y $d_k = 8 \quad \forall k \in \{5, \dots, 10\}$. Calcule:

$$\sum_{k=1}^{10} d_k =$$

23. Sea $d_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\} \cup \{9, \dots, 20\}$. Simplifique la suma:

$$\sum_{k=1}^{20} d_k =$$

24. Sea $d_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 5\} \cup \{7, \dots, 20\}$. Simplifique la suma:

$$\sum_{k=1}^{20} d_k =$$

Entradas del producto por debajo de la diagonal principal en el caso particular $n = 20$

En los siguientes ejercicios se considera el producto de dos matrices triangulares superiores $A, B \in \mathfrak{ut}_{20}(\mathbb{R})$ con entradas generales.

Ejemplo. Demostrar que $(AB)_{12,7} = 0$.

Solución. Por la definición del producto,

$$(AB)_{12,7} = \sum_{k=1}^{20} A_{12,k} B_{k,7}.$$

Dividimos la suma en tres partes:

$$(AB)_{12,7} = \sum_{k=1}^7 \underbrace{A_{12,k}}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (k \leq 7 < 12)}} B_{k,7} + \sum_{k=8}^{11} \underbrace{A_{12,k}}_{\parallel 0} \underbrace{B_{k,7}}_{\parallel 0} + \sum_{k=12}^{20} A_{12,k} \underbrace{B_{k,7}}_{\parallel 0} = 0.$$

$(k \leq 7 < 12)$
 $(k \leq 11 < 12)$
 $(k \geq 8 > 7)$
 $(k \geq 12 > 7)$

□

Demuestre que las siguientes entradas del producto AB son nulas:

25. $(AB)_{7,2} =$

26. $(AB)_{17,5} =$

Entradas diagonales del producto en el caso particular $n = 20$

Seguimos trabajando con el producto de dos matrices triangulares superiores de orden 20:
 $A, B \in \mathfrak{ut}_{20}(\mathbb{R})$.

27. Calcular $(AB)_{8,8}$.

Solución.

$$(AB)_{8,8} = \sum_{k=1}^7 \underbrace{A_{8,k}}_{\substack{0 \\ (k \leq 7 < 8)}} B_{k,8} + A_{8,8}B_{8,8} + \sum_{k=9}^{20} A_{8,k} \underbrace{B_{k,8}}_{\substack{0 \\ (k \geq 9 > 8)}} .$$

Respuesta:

$$(AB)_{8,8} = A_{8,8}B_{8,8}.$$

□

Calcule las siguientes entradas del producto:

28. $(AB)_{3,3} =$

29. $(AB)_{14,14} =$

Entradas del producto por arriba de la diagonal principal en el caso particular $n = 20$

Seguimos considerando el producto de dos matrices triangulares superiores de orden 20: $A, B \in \mathfrak{ut}_{20}(\mathbb{R})$.

Ejemplo. Calcular $(AB)_{8,15}$.

Solución.

$$(AB)_{8,15} = \sum_{k=1}^7 \underbrace{A_{8,k}}_{\substack{0 \\ (k \leq 7 < 8)}} B_{k,15} + \sum_{k=8}^{15} A_{8,k} B_{k,15} + \sum_{k=16}^{20} A_{8,k} \underbrace{B_{k,15}}_{\substack{0 \\ (k \geq 16 > 15)}} .$$

Respuesta:

$$(AB)_{8,15} = \sum_{k=8}^{15} A_{8,k} B_{k,15} .$$

□

Calcule las siguientes entradas del producto AB :

30. $(AB)_{4,11} =$

31. $(AB)_{11,14} =$

Teorema: el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior. Demostración general

32. Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que $AB \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$.

Solución. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$. Vamos a demostrar que $(AB)_{i,j} = 0$.

Por definición del producto de matrices, la (i, j) -ésima entrada de la matriz AB se escribe como la siguiente suma:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n$$

Como las matrices A y B son triangulares superiores,

$$A_{i,k} = 0 \quad \text{para todos } i, k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{tales que } \underbrace{\hspace{2cm}}_?$$

$$B_{k,j} = 0 \quad \text{para todos } k, j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{tales que } \underbrace{\hspace{2cm}}_?$$

Por eso dividimos la suma en tres partes y mostremos que todos los sumandos son 0:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^j + \sum_{k=j+1}^i + \sum_{k=i+1}^n$$

□

**Fórmula para las entradas diagonales.
Demostración general**

33. Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y sea $i \in \{1, \dots, n\}$.
Enuncie y demuestre la fórmula para calcular $(AB)_{i,i}$.

**Fórmula para calcular las entradas no triviales.
Demostración general**

34. Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ y sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \leq j$.
Escriba y demuestre una fórmula para $(AB)_{i,j}$.