Espacios vectoriales

Problemas teóricos

Muchos de estos problemas me los han enseñado mis colegas: profesores Flor de María Correa Romero, Carlos Domínguez Albino, Sergio González Govea, Myriam Rosalía Maldonado Ramírez, Eliseo Sarmiento Rosales.

Definición de espacio vectorial

1. Escriba la definición de espacio vectorial.

En los siguientes problemas se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

2. Unicidad del vector cero.
Sean $z, w \in V$ elementos neutros bajo la operación de adición:

$$\begin{aligned} &\forall a \in V \quad z + a = a, && \forall a \in V \quad a + z = a, \\ &\forall a \in V \quad w + a = a, && \forall a \in V \quad a + w = a. \end{aligned}$$

Demuestre que $z = w$.

3. Unicidad del vector opuesto (inverso aditivo).
Sea $a \in V$ y sean $b, c \in V$ vectores opuestos al vector a:

$$a + b = \mathbf{0}, \qquad b + a = \mathbf{0}, \qquad a + c = \mathbf{0}, \qquad c + a = \mathbf{0}.$$

Demuestre que $b = c$.

4. Ley de cancelación para la adición.
Sean $a, b, c \in V$ tales que $a + b = a + c$. Demuestre que $b = c$.

5. Existencia y unicidad de la resta.
Sean $a, b \in V$. Demuestre que existe un único $x \in V$ tal que $a + x = b$.

6. Multiplicación por el vector cero.
Sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

7. Multiplicación por el escalar cero.
Sea $a \in V$. Demuestre que $0a = \mathbf{0}$.

8. ¿Cuándo el producto de un vector por un escalar puede ser cero?.
Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$ tales que $\lambda a = \mathbf{0}$. Demuestre que $\lambda = 0$ o $a = \mathbf{0}$.

9. Producto de un vector por el escalar -1.
Sea v un elemento de un espacio vectorial V. Demuestre que el producto $(-1)v$ es un elemento opuesto (= inverso aditivo) de v.

Ejemplos de espacios vectoriales

Para cada uno de los siguientes espacio escriba cómo se definen las operaciones lineales y demuestre algunos de los axiomas de espacio vectorial.

10. $\mathbb{F}^n$.
$\mathbb{F}^n$, donde $\mathbb{F}$ es un campo.

11. $V^2(O)$.
Sea Π el plano euclidiano (definido por axiomas de Euclides–Hilbert) y sea O un punto de Π. El conjunto $V^2(O)$ consiste en los segmentos dirigidos (en otras palabras, flechas) con el punto inicial O.

12. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.
El espacio de los polinomios de una variable con coeficientes pertenecientes al campo $\mathbb{F}$.

13. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.
Matrices $m \times n$ con entradas pertenecientes al campo $\mathbb{F}$.

14. $\mathbb{F}^X$.
Se denota por $\mathbb{F}^X$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{F}$.
Sean $f, g\colon X \to \mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Escriba las definiciones de $f + g$ y λf:

$$f + g\colon\ ? \to ? \qquad\qquad \forall x \in X \quad (f + g)(x) = ?$$
$$\lambda f\colon\ ? \to ? \qquad\qquad \forall x \in X \quad (\lambda f)(x) = ?$$

15. $C([a, b], \mathbb{C})$.
El espacio de las funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{C}$.

Ejemplos de conjuntos que no son espacios vectoriales

Mostrar que los siguientes conjuntos *no son* espacios vectoriales reales. En cada uno de los ejemplos aclarar, cuales axiomas de espacio vectorial no se cumplen, y dar contraejemplos concretos. Por $+$ y $\cdot$ denotamos las operaciones lineales comunes, y los signos $\oplus$ y $\odot$ usamos para operaciones no comunes.

16. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ no es espacio vectorial. Aquí $\cdot$ es la multiplicación común por escalares y la adición $\oplus$ está definida mediante la siguiente regla:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}.$$

17. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ no es espacio vectorial, donde $\cdot$ es la operación común de multiplicación por escalares, y la operación $\oplus$ está definida por la regla

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

A. Muestre que la operación $\oplus$ es asociativa y conmutativa.

B. Encuentre un elemento $a \in \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ se cumple la igualdad $a \oplus x = a$.

C. Se puede notar que el elemento a encontrado en el inciso B no coincide con $\mathbf{0}_2$, esto es, el elemento neutro de la operación $\oplus$ no es el mismo que el elemento neutro de la operación $+$.

D. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ encuentre un $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \oplus y = a$, donde a es elemento encontrado en el inciso B.

E. Se puede notar que el elemento y encontrado en el inciso D no coincide con

$$-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

esto es, el elemento inverso de x respecto a la operación $\oplus$ no coincide con el inverso de x respecto a la operación $+$.

F. Los incisos anteriores muestran que se satisfacen los primeros 4 axiomas del espacio vectorial (los axiomas de adición). Por supuesto, el elemento neutro y los elementos inversos respecto a la operación $\oplus$ no son los mismos que el elemento neutro y los elementos inversos respecto a la operación común $+$.

G. Muestre con contraejemplos concretos (numéricos) que la operación $\oplus$ y la operación común de multiplicación por escalares no cumplen las leyes distributivas.

18. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ no es espacio vectorial. Aquí $+$ es la adición común en $\mathbb{R}^2$ y la multiplicación por escalares $\odot$ está definida mediante la siguiente regla:

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

19. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ no es espacio vectorial. Aquí

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda^2 x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

20. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ no es espacio vectorial. Aquí $0 \odot a \coloneqq \mathbf{0}_2$ y para todo $\lambda \neq 0$

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} x_1 \\ \frac{1}{\lambda} x_2 \end{bmatrix}.$$

21. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ no es espacio vectorial. Aquí

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} 2\lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Definición y criterio de subespacio

22. Escriba la definición de subespacio de un espacio vectorial.

23. Enuncie y demuestre el criterio de subespacio de un espacio vectorial.

24. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{F}^n$ son subespacios de $\mathbb{F}^n$:

i) $S = \Big\{x \in \mathbb{F}^n\colon\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\Big\}$.

ii) $S = \Big\{x \in \mathbb{F}^n\colon\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\Big\}$.

iii) $S = \big\{x \in \mathbb{F}^n\colon\ Ax = b\big\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^m \setminus \{\mathbf{0}_m\}$.

Ejemplos de subconjuntos que no son subespacios

En cada uno de los siguientes problemas demuestre que S no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

25. $S = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\colon\ |x_1| = |x_2|\right\}$.

26. $S = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\colon\ |x_1| = x_2\right\}$.

27. $S = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\colon\ 3x_1 \geq 5x_2\right\}$.

28. $S = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\colon\ 2x_1 + x_2 \neq 4\right\}$.

En cada uno de los siguientes problemas demuestre que S no es subespacio de $\mathbb{C}^2$. Indique cuál condición no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

29. $S = \left\{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2\colon\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)\right\}$.

30. $S = \left\{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2\colon\ \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)\right\}$.

Ejemplos de subespacios

En los siguientes ejemplos demuestre que S es un subespacio del espacio vectorial V.

31. Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. $V = \mathbb{F}^n$, $S = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \ Ax = \mathbf{0}_m\big\}$, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

32. Polinomios de grado $\le n$. $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$,

$$S = \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = \big\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\colon\ \ \deg(f) \le n\big\}.$$

Aquí se utiliza el acuerdo que $\deg(0) = -\infty$.

33. Matrices triangulares superiores. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad (i > j) \ \Rightarrow\ (A_{i,j} = 0)\big\}.$$

34. Matrices triangulares inferiores. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad (i < j) \ \Rightarrow\ (A_{i,j} = 0)\big\}.$$

35. Matrices diagonales. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \operatorname{Diag}_n(\mathbb{F}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad (i \ne j) \ \Rightarrow\ (A_{i,j} = 0)\big\}.$$

36. Matrices simétricas. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \ A^\top = A\big\}.$$

37. Matrices antisimétricas. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \ A^\top = -A\big\}.$$

38. Matrices con traza nula. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \ \operatorname{tr}(A) = 0\big\}.$$

39. Funciones continuas pares. $V = C(\mathbb{R})$,

$$S = \big\{f \in C(\mathbb{R})\colon\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)\big\}.$$

40. Funciones continuas impares. $V = C(\mathbb{R})$,

$$S = \big\{f \in C(\mathbb{R})\colon\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)\big\}.$$

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

Notación. Dados $a_1, \ldots, a_m \in V$, denotamos por $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ al siguiente subconjunto de V:

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \coloneqq \left\{ v \in V \colon \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F} \qquad v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\}.$$

41. El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores es un subespacio. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demuestre que S es un subespacio de V.

42. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $a_i \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

43. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demuestre que cualquier subespacio W del espacio V que contiene a los vectores $a_1, \ldots, a_m$, contiene al conjunto S.

44. Propiedad transitiva de las combinaciones lineales, un caso particular. Sean $a_1, a_2 \in V$, sean $b_1, b_2, b_3 \in \ell(a_1, a_2)$ y sea $c \in \ell(b_1, b_2, b_3)$. Demuestre que $c \in \ell(a_1, a_2)$.

45. Propiedad transitiva de las combinaciones lineales. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$, sean $b_1, \ldots, b_n \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$ y sea $c \in \ell(b_1, \ldots, b_n)$. Demuestre que $c \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

Suma e intersección de subespacios

Se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

46. Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 + S_2$ también es un subespacio de V.

47. Intersección de dos subespacios. Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 \cap S_2$ también es un subespacio de V.

48. Unión de dos subespacios. Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que $S_1 \cup S_2$ también es un subespacio de V. Demuestre que $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$. (Este problema muestra que la unión de dos subespacios casi nunca es un subespacio, solamente en un caso trivial cuando uno de los subespacios originales está contenido en el otro.)

49. Suma de dos subespacios dados por sus generadores. Sean

$$S_1 = \ell(a_1, \ldots, a_m), \qquad S_2 = \ell(b_1, \ldots, b_n).$$

Demuestre que

$$S_1 + S_2 = \ell(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n).$$

50. En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ consideremos los subespacios $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$ de las matrices triangulares superiores y triangulares inferiores respectivamente. Calcule

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) + \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F}) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) \cap \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})\,.$$

Sumas directas

51. Criterio de la suma directa. Sean S_1 y S_2 subespacios de V. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Para todo $v \in V$ existe un único par $(u, w) \in S_1 \times S_2$ tal que $v = u + w$.

(b) $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

En cada uno de los siguientes ejercicios demuestre que V es la suma directa de S_1 y S_2.

52. $V = \mathbb{F}$,

$$S_1 = \big\{x \in \mathbb{F}^2 :\ x_2 = 0\big\}, \qquad S_2 = \big\{x \in \mathbb{F}^2 :\ x_1 = 0\big\}.$$

53. Matrices simétricas y antisimétricas. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,

$$S_1 = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) :\ A^\top = A\big\}, \qquad S_2 = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) :\ A^\top = -A\big\}.$$

54. Polinomios pares e impares. $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$,

$$S_1 = \big\{f \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) :\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)\big\},$$
$$S_2 = \big\{f \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) :\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)\big\}.$$

Dependencia lineal

55. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

A. ¿Cuándo se dice que la combinación lineal $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$ es nula?

B. ¿Cuándo se dice que la combinación lineal $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$ es trivial?

56. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. ¿Cuándo se dice que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente?

A. Escriba la definición de manera formal, con cuantificadores.

B. Escriba la definición con palabras, usando los conceptos de *combinación lineal nula* y *combinación lineal trivial.*

57. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}.$$

Determine para cuál valor del parámetro p los vectores a, b, c son linealmente dependientes.

58. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $a_m = \mathbf{0}$. Demuestre que la lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente.

59. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Supongamos que existe un índice $p \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a_p = \mathbf{0}$. Demuestre que la lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente.

60. Sean $m < n$ y sean $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in V$ tales que $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente dependientes. Demuestre que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente dependientes.

61. Si en una lista de vectores un vector es combinación lineal de los demás, entonces esta lista de vectores es linealmente dependiente. Sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ y sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_k \in \ell\big(a_i\big)_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne k}}$, esto es, existen escalares λ_i, $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ tales que

$$a_k = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} \lambda_i a_i.$$

Demuestre que $a_1, \ldots, a_n$ son linealmente dependientes.

62. En una lista de vectores linealmente dependientes, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los anteriores. Sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ linealmente dependientes. Demuestre que al menos uno de estos vectores es una combinación lineal de los anteriores, esto es, existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$a_k \in \ell\big((a_i)_{i=1}^{k-1}\big).$$

63. En una lista de vectores linealmente dependientes, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los anteriores. Sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ linealmente dependientes. Demuestre que al menos uno de estos vectores es una combinación lineal de los posteriores, esto es, existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$a_k \in \ell\big((a_i)_{i=k+1}^{n}\big).$$

64. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores linealmente independientes y sea $b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demuestre que los vectores $a_1, \ldots, a_m, b$ son linealmente dependientes.

65. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores linealmente independientes y sea $b \in V$ un vector tal que los vectores $a_1, \ldots, a_m, b$ son linealmente dependientes. Demuestre que $b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

66. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores linealmente independientes y sea $b \in V$. Demuestre que $a_1, \ldots, a_m, b$ son linealmente dependientes, si y sólo si, $b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

67. Teorema principal de las dependencias lineales, ejemplo. Sean a_1, a_2 vectores de un espacio vectorial V y sean

$$b_1 = 2a_1 + a_2, \qquad b_2 = 5a_1 + 3a_2, \qquad b_3 = 3a_1 - a_2.$$

Demuestre de manera explícita que los vectores b_1, b_2, b_3 son linealmente dependientes, esto es, encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \mathbf{0}$.

68. Teorema principal de las dependencias lineales. Sean $a_1, \ldots, a_p \in V$ y sean $b_1, \ldots, b_q \in \ell(a_1, \ldots, a_p)$, donde $q > p$. Demuestre que $b_1, \ldots, b_q$ son linealmente dependientes.

69. Sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ algunos vectores linealmente independientes y sean $b_1, \ldots, b_n$ las siguientes combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_n$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad b_j = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j} a_i.$$

Supongamos que la matriz $M = \big[t_{i,j}\big]_{i,j=1}^{n}$ es invertible. Demuestre que $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente independientes.