Sistemas de ecuaciones lineales

Problemas teóricos

Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

En los siguientes problemas hay que resolver el sistema de ecuaciones lineales para todo valor del parámetro λ.

1. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4; \\ -6x_1 + 4x_2 = \lambda. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \lambda x_1 - 4x_2 = -6; \\ -x_1 + \lambda x_2 = 3. \end{cases}$$

En los siguientes problemas hay que determinar para qué valores del parámetro λ el sistema tiene: 1) una única solución; 2) más de una solución; 3) ninguna solución.

3. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 = \lambda. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

Ecuaciones matriciales indeterminadas

5. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Operaciones elementales y matrices elementales

6. Muestre que cualquier operación elemental del tipo $R_p \leftrightarrow R_q$, donde $p \neq q$, se puede expresar a través de operaciones elementales de otros dos tipos ($R_s += \lambda R_j$ con $s \neq j$, y $R_k *= \mu$, $\mu \neq 0$).

Notación (matrices elementales). Las matrices elementales se obtienen de la matriz identidad I_n al aplicar operaciones elementales:

- $E_{\leftrightarrow}(p, q)$ se obtiene de I_n al aplicar la operación $R_p \leftrightarrow R_q$, donde $p \neq q$;
- $E_*(p, \lambda)$ se obtiene de I_n al aplicar la operación $R_p *= \lambda$, donde $\lambda \neq 0$;
- $E_+(q, p, \lambda)$ se obtiene de I_n al aplicar la operación $R_q += \lambda R_p$, donde $\lambda \neq 0$ y $p \neq q$.

7. Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo corresponde a operaciones elementales con renglones. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Explique qué operación elemental se debe aplicar a los renglones de la matriz A para obtener los siguientes productos:

- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} E_{\leftrightarrow}(p, q)A$.
- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} E_*(p, \lambda)A$.
- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} E_+(q, p, \lambda)A$.

8. Operaciones elementales con renglones corresponden a la multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. En cada uno de los siguientes casos encuentre la matriz elemental E:

- $A \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q} EA, \qquad E = ?.$
- $A \xrightarrow{R_p *= \lambda} EA, \qquad E = ?.$
- $A \xrightarrow{R_q += \lambda R_p} EA, \qquad E = ?.$

9. Multiplicación por matrices elementales del lado derecho corresponde a operaciones elementales con columnas. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Explique qué operación elemental se debe aplicar a las columnas de la matriz A para obtener los siguientes productos:

- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} AE_{\leftrightarrow}(p,q)$.
- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} AE_{*}(p,\lambda)$.
- $A \xrightarrow{\quad ? \quad} AE_{+}(q,p,\lambda)$.

10. Operaciones elementales con columnas corresponden a la multiplicación por matrices elementales del lado derecho. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. En cada uno de los siguientes casos encuentre la matriz elemental E:

- $A \xrightarrow{C_p \leftrightarrow C_q} AE, \qquad E = ?.$
- $A \xrightarrow{C_p \mathrel{*}= \lambda} AE, \qquad E = ?.$
- $A \xrightarrow{C_q \mathrel{+}= \lambda C_p} AE, \qquad E = ?.$

11. Determine cuáles de las matrices elementales son triangulares superiores; triangulares inferiores; diagonales; simétricas. Indicación: las matrices $E_{+}(q,p,\lambda)$ se dividen en dos clases: $p < q$ y $p > q$.

12. Encuentre las inversas de las matrices elementales:

$$E_{\leftrightarrow}(p,q)^{-1} = ? \qquad E_{*}(p,\lambda)^{-1} = ? \qquad E_{+}(q,p,\lambda)^{-1} = ?$$

13. Encuentre las transpuestas de las matrices elementales:

$$E_{\leftrightarrow}(p,q)^{\top} = ? \qquad E_{*}(p,\lambda)^{\top} = ? \qquad E_{+}(q,p,\lambda)^{\top} = ?$$

14. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ una matriz triangular superior y sea B la matriz que se obtiene de A al aplicar la operación elemental $R_p * = \lambda$. Demuestre que B es triangular superior.

15. Sea $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$ una matriz triangular inferior y sea B la matriz que se obtiene de A al aplicar la operación elemental $R_q + = \lambda R_p$, donde $q < p$. Demuestre que B es triangular inferior.

Definición y propiedades de la matriz inversa

16. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que B es inversa izquierda a la matriz A y C es inversa derecha a la matriz A:

$$BA = I_n, \qquad AC = I_n.$$

Demuestre que $B = C$.

17. Definición: una matriz inversa a otra. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que la matriz A es inversa a la matriz B?.

18. Definición: matriz invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que A es invertible?.

19. Si una matriz tiene un renglón nulo, entonces no es invertible. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $A_{p,*} = \mathbf{0}_{1,n}$. Demuestre que A no es invertible.

20. Si una matriz tiene una columna nula, entonces no es invertible. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y $q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $A_{*,q} = \mathbf{0}_{n,1}$. Demuestre que A no es invertible.

21. Un ejemplo de una matriz no invertible con entradas no nulas. Usando solamente la definición demuestre que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Indicación: razonando por contradicción, suponga que alguna matriz X cumple la igualdad $AX = \mathbf{0}_{2,2}$. Escriba cuatro ecuaciones para las cuatro entradas incógnitas de la matriz X y muestre que este sistema no tiene solución.

22. Unicidad de la matriz inversa. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que si existe una matriz inversa a la matriz A, entonces es única.

23. Inversa de la matriz identidad. Encuentre la inversa de la matriz I_n.

24. Inversa de la inversa. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Demuestre que su inversa A^{-1} también es invertible y que $(A^{-1})^{-1} = A$.

25. Inversa del producto. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ matrices invertibles. Demuestre que AB también es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

26. Inversa de la transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Demuestre que $A^\top$ también es invertible y que $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales

Definición (matrices equivalentes por la izquierda). Matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ se llaman *equivalentes por la izquierda* o *equivalentes por renglones* (notación: $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$) si existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_k A = B.$$

De manera similar se definen matrices *equivalentes por la derecha.*

27. Demuestre que la relación binaria $\overset{\text{izq}}{\sim}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

28. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que sean equivalentes por la izquierda, pero no sean equivalentes por la derecha.

29. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ y A es invertible por la derecha, esto es, existe una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $AC = I_n$. Demuestre que B también es invertible por la derecha.

30. Criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de matrices elementales. Enuncie el teorema, indique las implicaciones triviales y las implicaciones no tan triviales pero cómodas para demostrar.

Los siguientes ejercicios contienen varios pasos de la demostración.

31. Sea $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ matrices elementales y sea $A = E_1 \cdots E_k$. Demuestre que A es invertible.

32. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible por la derecha. Demuestre que $A \overset{\text{izq}}{\sim} I_n$.

33. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que $A \overset{\text{izq}}{\sim} I_n$. Demuestre que A se puede representar como un producto de matrices elementales.

34. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible por la izquierda. Demuestre que $A \overset{\text{der}}{\sim} I_n$.

35. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que $A \overset{\text{der}}{\sim} I_n$. Demuestre que A se puede representar como un producto de matrices elementales.

Criterios de la equivalencia por izquiera y por derecha

36. Criterio de la equivalencia por la izquierda. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $B = E_k \cdots E_1 A$.

(b) existe una matriz invertible $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $B = UA$.

37. Criterio de la equivalencia por la derecha. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $B = AE_1 \cdots E_k$.

(b) existe una matriz invertible $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $B = AU$.

Cálculo de la matriz inversa

38. Calcule la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Sean $\alpha, \beta \neq 0$. Calcule la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$