Formas bilineales y cuadráticas

Problemas teóricos

En estos ejercicios se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Definición (forma bilineal). Escriba la definición de forma bilineal sobre V.

Denotemos por $\mathcal{BL}(V)$ al conjunto de las formas bilineales sobre V.

2. Suma de formas bilineales. Sean $f, g \in \mathcal{BL}(V)$. Escriba la definición de $f + g$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{BL}(V)$.

3. Producto de una forma bilineal por un escalar. Sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que $\lambda f \in \mathcal{BL}(V)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la siguiente regla. Determine si f es bilineal.

$$f(x, y) = 4x_1y_1 - 7x_2.$$

Representación matricial de formas bilineales

En estos ejercicios se supone que V es un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$.

5. Definición (la matriz asociada a una forma bilineal con respecto a una base). Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Escriba la fórmula que define la matriz $f_{\mathcal{B}}$, es decir, la *matriz asociada a f con respecto a la base $\mathcal{B}$*.

6. Teorema de la representación matricial de una forma bilineal. Sea $\mathcal{B}$ una base de V, sean $f \in \mathcal{BL}(V)$, $u, v \in V$. Demuestre que

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

7. Unicidad de la representación matricial de una forma bilineal. Sea $\mathcal{B}$ una base en V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Supongamos que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que para cualesquiera $u, v \in V$

$$f(u, v) = u_{\mathcal{B}}^{\top} C v_{\mathcal{B}}.$$

Demuestre que $f_{\mathcal{B}} = C$.

8. Teorema de cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que

$$f_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{\top} f_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

Correspondencia entre las formas bilineales y las matrices

9. La correspondencia entre las formas bilineales y sus matrices asociadas es lineal. Sean $f, g \in \mathcal{BL}(V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Demuestre que

$$(f+g)_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}} + g_{\mathcal{B}}, \qquad (\lambda f)_{\mathcal{B}} = \lambda f_{\mathcal{B}}.$$

10. La correspondencia entre las formas bilineales y sus matrices asociadas es inyectiva. Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sean $f, g \in \mathcal{BL}(V)$ tales que $f_{\mathcal{B}} = g_{\mathcal{B}}$. Demuestre que $f = g$.

11. La correspondencia entre las formas bilineales y las matrices es suprayectiva. Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Construya una forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(V)$ tal que $f_{\mathcal{B}} = A$.

Formas bilineales simétricas y antisimétricas

En estos ejercicios se supone que V es un espacio vectorial real.

12. Definiciones (forma bilineal simétrica, forma bilineal antisimétrica). Escriba las definiciones correspondientes.

13. Dé un ejemplo de una forma bilineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que no sea simétrica.

14. Sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que existe un único par (g, h) de formas bilineales en $\mathcal{BL}(V)$ tales que g es simétrica y h es antisimétrica.

15. Demuestre que el espacio vectorial $\mathcal{BL}(V)$ de las formas bilineales sobre V es la suma directa de sus subespacios $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$ que constan de todas las formas simétricas y antisimétricas, respectivamente.

16. Criterio para la forma bilineal simétrica en términos de su matriz asociada. Sea V un espacio de dimensión finita, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que f es simétrica si y sólo si su matriz asociada respecto $\mathcal{B}$ es simétrica:

$$f \in \mathcal{BL}_s(V) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (f_{\mathcal{B}})^\top = f_{\mathcal{B}}.$$

17. Criterio para la forma bilineal antisimétrica en términos de su matriz asociada. Sea V un espacio de dimensión finita, sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$. Demuestre que f es antisimétrica si y sólo si su matriz asociada respecto $\mathcal{B}$ es antisimétrica:

$$f \in \mathcal{BL}_s(V) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (f_{\mathcal{B}})^\top = -f_{\mathcal{B}}.$$

18. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. Calcule las dimensiones de los espacios $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$.

19. Sea V un espacio vectorial real. Demuestre que para toda forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(V)$ existe una forma bilineal simétrica $g \in \mathcal{BL}_s(V)$ tal que $f(v, v) = g(v, v)$ para todo $v \in V$.

Formas cuadráticas

En estos ejercicios se supone que V es un espacio vectorial real.

20. Identidad de paralelogramo. Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sean $a, b \in V$. Demuestre que

$$q(a+b) + q(a-b) = 2\big(q(a) + q(b)\big).$$

21. Propiedad homogénea de grado dos. Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$q(\lambda a) = \lambda^2 q(a).$$

22. Identidades de polarización. Sea $f \in \mathcal{BL}_s(V)$ y sea q la forma cuadrática inducida por f. Demuestre que para todos $a, b \in V$

$$f(a,b) = \frac{1}{2}\big(f(a+b) - f(a) - f(b)\big),$$
$$f(a,b) = \frac{1}{4}\big(f(a+b) - f(a-b)\big).$$

23. Suma de formas cuadráticas. Sean $f, g \in \mathcal{Q}(V)$. Escriba la definición de $f+g$ y demuestre que $f+g \in \mathcal{Q}(V)$.

24. Producto de una forma cuadrática por un escalar. Sea $f \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Escriba la definición de λf y demuestre que $\lambda f \in \mathcal{Q}(V)$.

25. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. Calcule la dimensión del espacio $\mathcal{Q}(V)$ que consta de todas las formas cuadráticas sobre V.

26. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla de correspondencia

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, esto es, encuentre una forma bilineal *simétrica* f tal que $q(x) = f(x,x)$.

27. Sea V un espacio vectorial real y sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ una forma bilineal (no necesariamente simétrica). Demuestre que la función $q\colon V \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla es una forma cuadrática:

$$q(v) = f(v,v) \qquad \forall v \in V.$$

28. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla no es una forma cuadrática:

$$q(x) = 3x_1x_2 + x_2^3.$$

29. Demuestre que la función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla no es una forma cuadrática:

$$q(x) = 5x_1 - 4x_1x_2.$$

Representación matricial de formas cuadráticas

En estos ejercicios se supone que V es un espacio vectorial real de dimensión finita n.

30. Definición (la matriz asociada a una forma cuadrática con respecto a una base). Escriba la definición correspondiente y explique por qué esta es correcta.

31. Sean V un espacio vectorial real de dimensión 2, $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ una base de V y $q \in \mathcal{Q}(V)$. Calcule la matriz $q_{\mathcal{B}}$ asociada a q respecto la base $\mathcal{B}$, si están dados los siguientes valores:

$$q(b_1 + b_2) = 12, \qquad q(b_1 - b_2) = -8.$$

32. Sean V un espacio vectorial real de dimensión 3, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ una base de V y $q \in \mathcal{Q}(V)$. Calcule la matriz $q_{\mathcal{B}}$ asociada a q respecto la base $\mathcal{B}$, si están dados los siguientes valores:

$$q(b_1 + b_2) = 10, \qquad q(b_1 + b_3) = -6, \qquad q(b_2 + b_3) = 14,$$

$$q(b_1 - b_2) = -10, \qquad q(b_1 - b_3) = 22, \qquad q(b_2 - b_3) = 6.$$

33. Teorema de la representación matricial de una forma cuadrática. Sea $\mathcal{B}$ una base de V, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $v \in V$. Demuestre que

$$q(v) = v_{\mathcal{B}}^{\top} q_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

34. Teorema sobre la unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática. Sea $\mathcal{B}$ una base en V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Supongamos que $C \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{F})$ tal que para cualquier $v \in V$ se cumple la igualdad

$$q(v) = v_{\mathcal{B}}^{\top} C v_{\mathcal{B}}.$$

Demuestre que $q_{\mathcal{B}} = C$.

35. Teorema de cambio de la matriz asociada a una forma cuadrática al cambiar la base del espacio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Demuestre que

$$q_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{\top} q_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

36. S.ea V un espacio vectorial real de dimensión 2, $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ bases de V y $q \in \mathcal{Q}(V)$. Calcule $q_{\mathcal{B}}$ si

$$q_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad b_1 = a_1 - a_2, \qquad b_2 = a_1.$$

37. Teorema de la diagonalización de formas cuadráticas. Enuncie el teorema.

Invariantes de una forma cuadrática

38. Proposición (de la restricción de una forma cuadrática a un subespacio). Sea V un espacio vectorial real, sea S un subespacio de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Denotemos por $q|_S$ a la restricción de q al conjunto S:

$$q|_S \colon S \to \mathbb{R}, \qquad (q|_S)(v) \coloneqq q(v) \quad \forall v \in S.$$

Demuestre que $q|_S \in \mathcal{Q}(S)$.

39. Definición (forma cuadrática positiva definida en un subespacio). Sea V un espacio vectorial real, sea S un subespacio de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. ¿Qué significa la frase, "q es positiva definida en S"?.

40. Definiciones (el índice de inercia positivo, el índice de inercia negativo). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Escriba las definiciones invariantes (geométricas) de $\mathrm{r}_+(q)$ y $\mathrm{r}_-(q)$.

41. Teorema (cálculo de los índices de inercia de una forma cuadrática). Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de V tal que la matriz $q_{\mathcal{B}}$ es diagonal:

$$q_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_s, 0, \ldots, 0),$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_s < 0$. Demuestre que $p = \mathrm{r}_+(q)$, $q = \mathrm{r}_-(q)$.

42. Corolario (la ley de inercia de formas cuadráticas). Enuncie y demuestre la afirmación correspondiente.

43. El "núcleo" de una forma cuadrática es cerrado con respecto a la multiplicación por escalares. Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Definamos al conjunto $N_q \subseteq V$ como la preimagen del número 0 bajo la función q:

$$N_q \coloneqq \bigl\{v \in V \colon \; q(v) = 0\bigr\}.$$

Demuestre que $\mathbf{0} \in N_q$. Demuestre que q es cerrado bajo la multiplicación por escalares:

$$\forall v \in N_q \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda v \in N_q.$$

44. El "núcleo" de formas cuadráticas (ejemplos). Calcule N_q para cada una de las siguientes formas cuadráticas $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$:

$$q(x) = 0, \qquad q(x) = x_1^2 + x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2.$$

45. El "núcleo" de una forma cuadrática no siempre es espacio vectorial. Encuentre una forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ tal que N_q no sea espacio vectorial.

46. Criterio de la congruencia para matrices cuadrádas simétricas. Sean $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $A \cong B$.

(b) $\mathrm{r}_+(A) = \mathrm{r}_+(B)$ y $\mathrm{r}_-(A) = \mathrm{r}_-(B)$.

Signo de los valores de una forma cuadrática

47. Definición (formas cuadráticas positivas definidas, etc.). Sea V un espacio vectorial real y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Escriba las definiciones de los siguientes conceptos:

1. $q > 0$.
2. $q < 0$.
3. $q \geq 0$.
4. $q \leq 0$.
5. $q \geqq 0$.
6. $q \leqq 0$.
7. $q \gtrless 0$.
8. $q = 0$.

48. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Escriba los criterios de las siguientes situaciones en términos de los índices de inercia $\mathrm{r}_+(q)$ y $\mathrm{r}_-(q)$:

1. $q > 0$.
2. $q < 0$.
3. $q \geq 0$.
4. $q \leq 0$.
5. $q \geqq 0$.
6. $q \leqq 0$.
7. $q \gtrless 0$.
8. $q = 0$.

Congruencia de matrices reales simétricas

Definición (relación de congruencia sobre el conjunto de las matrices reales simétricas de orden n). La relación binaria $\cong$ llamada la *relación de congruencia* se define sobre el conjunto $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad \det(P) \neq 0 \quad \wedge \quad B = P^\top A P.$$

49. Demuestre que la relación de congruencia sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una relación de equivalencia. En otras palabras, demuestre que $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

50. Demuestre que ningunas dos de las siguientes matrices $D_1, \ldots, D_6$ son congruentes, y cualquier matriz $A \in \mathcal{SM}_2(\mathbb{R})$ es congruente a una de las matrices $D_1, \ldots, D_6$:

$$\begin{array}{lll} D_1 = \operatorname{diag}(1,1), & D_2 = \operatorname{diag}(1,-1), & D_3 = \operatorname{diag}(1,0), \\ D_4 = \operatorname{diag}(-1,-1), & D_5 = \operatorname{diag}(-1,0), & D_6 = \operatorname{diag}(0,0). \end{array}$$

51. Calcule el número de las clases de congruencia en $\mathcal{SM}_2(\mathbb{R})$.

52. Calcule el número de las clases de congruencia en $\mathcal{SM}_3(\mathbb{R})$.

53. Tarea adicional. Calcule el número de las clases de congruencia en $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$.

54. Tarea adicional. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $x^\top A\, x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$;

(b) existe una matriz invertible $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = B^\top B$.

55. Tarea adicional. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $x^\top A\, x \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = B^\top B$.

Criterio de Sylvester

En este semestre no estudiamos este tema.

56. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3, sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ una base de V y sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. Consideremos la restricción r de la función f al subespacio generado por b_2 y b_3:

$$\mathcal{F} \coloneqq (b_2, b_3), \qquad S = \ell(b_2, b_3), \qquad r = q|_S.$$

Calcule la matriz $r_{\mathcal{F}}$ si

$$q_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

57. Demuestre el siguiente lema que se usa en la demostración del criterio de Sylvester: Sea V un espacio vectorial real, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$, $q > 0$, y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces $\det(q_{\mathcal{B}}) > 0$.

58. Escriba el enunciado del criterio de Sylvester para la forma cuadrática estrictamente positiva.