Operaciones con matrices

Problemas teóricos

En todos los problemas de esta lista se supone que $\mathbb{F}$ es un campo (cuerpo). Si no conoce bien el concepto de campo, entonces puede pensar que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$

1. Definición de las operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$. Escriba la definición de $a + b$ y λa, donde $a, b \in \mathbb{F}^n$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

2. Definición de la tupla nula $\mathbf{0}_n \in \mathbb{F}^n$. Escriba la definición de $\mathbf{0}_n$.

3. Definición de la tupla $-a$. Escriba la definición de $-a$, donde $a \in \mathbb{F}^n$.

Basta con resolver 3 de los siguientes 8 problemas, por ejemplo 4, 8 y 11.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

5. Sea $a \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$a + \mathbf{0}_n = a.$$

6. Sea $a \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$a + (-a) = \mathbf{0}_n.$$

7. Sean $a, b \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$a + b = b + a.$$

8. Sean $a, b \in \mathbb{F}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

9. Sea $a \in \mathbb{F}^n$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

10. Sea $a \in \mathbb{F}^n$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

11. Sea $a \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$1a = a.$$

Delta de Kronecker y vectores básicos en $\mathbb{F}^n$

12. Definición de la delta de Kronecker. Escriba la definición de $\delta_{i,j}$, donde $i, j \in \mathbb{Z}$.

13. Propiedad principal de la delta de Kronecker.
Simplifique la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j} a_k.$$

Considere dos casos: 1) $j \in \{1, \ldots, n\}$ y 2) $j \notin \{1, \ldots, n\}$.

Notación: vectores básicos en $\mathbb{F}^n$. Sea n un número fijo y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por e_p al vector del espacio $\mathbb{F}^n$ cuya p-ésima componente es 1 y todas las demás son 0. Los vectores $e_1, \ldots, e_n$ se llaman también los *vectores de la base canónica* de $\mathbb{F}^n$. Luego vamos a comprender el sentido de estas palabras.

14. Fórmula para las componentes de los vectores $e_1, \ldots, e_p$. Sea $p, j \in \{1, \ldots, n\}$. Escriba una fórmula para la j-ésima componente de e_p en términos de la delta de Kronecker:

$$(e_p)_j = ?$$

15. Combinación lineal de vectores básicos en $\mathbb{F}^n$. Denotamos por $e_1, \ldots, e_n$ a los vectores básicos en $\mathbb{F}^n$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Calcule la suma:

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p e_p.$$

16. Producto de una matriz por un vector básico.
Sea n un número fijo y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por e_p al vector del espacio $\mathbb{F}^n$ cuya p-ésima componente es 1 y todas las demás son 0. Considere el producto de una matriz arbitraria $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ por el vector e_p. Enuncie y demuestre la fórmula.

Operaciones lineales con matrices

17. Definición de las operaciones lineales en $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m,n}}(\mathbb{F})$. Escriba la definición de $A+B$ y λA, donde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

18. Definición de la matriz nula $\mathbf{0}_{m,n}$. Escriba la definición de $\mathbf{0}_{m,n}$.

19. Definición de la matriz $-A$. Escriba la definición de $-A$, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

Basta con resolver 3 de los siguientes 8 problemas. Se recomienda demostrar propiedades distintas de las demostradas para $\mathbb{F}^n$.

20. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

21. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A + \mathbf{0}_{m,n} = A.$$

22. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A + (-A) = \mathbf{0}_{m,n}.$$

23. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A+B = B+A.$$

24. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$$

25. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$$

26. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

27. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$1A = A.$$

Multiplicación de matrices: definición y propiedades

28. Definición del producto de matrices.
Escriba la definición de AB, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$.

29. Teorema: la multiplicación de matrices es distributiva por la izquierda respecto la adición.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

30. Teorema: la multiplicación de matrices es distributiva por la derecha respecto la adición.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

31. Teorema: la multiplicación de matrices es asociativa.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$ y $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$(AB)C = A(BC).$$

32. Propiedad homogénea izquierda.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda A)B = \lambda(AB).$$

33. Propiedad homogénea derecha.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Multiplicación de matrices por vectores

34. Definición del producto de una matriz por un vector. Escriba la definición de Ax, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y $x \in \mathbb{F}^n$.

35. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $x \in \mathbb{F}^n$. Escriba el producto Ax como una combinación lineal de las columnas de la matriz A.

36. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sean $x, y \in \mathbb{F}^n$. Demuestre que

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

37. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, sea $x \in \mathbb{F}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Renglones y columnas del producto de matrices

Notación para renglones y columnas de matrices. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ denotamos por $A_{i,*}$ al i-ésimo renglón de A:

$$A_{i,*} \coloneqq \left[A_{i,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ denotamos por $A_{*,j}$ a la j-ésima columna de A:

$$A_{*,j} \coloneqq \left[A_{i,j}\right]_{i=1}^{m}.$$

38. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre la siguiente fórmula para el i-ésimo renglón del producto AB:

$$(AB)_{i,*} = A_{i,*}B.$$

39. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre la siguiente fórmula para la j-ésima columna del producto AB:

$$(AB)_{*,j} = AB_{*,j}.$$

Matriz identidad

40. Definición de la matriz identidad.
Escriba la definición de I_n usando la delta de Kronecker.

41. Teorema: la propiedad principal de la matriz identidad.
Usando la delta de Kronecker demuestre que para toda $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$

$$I_m A = A, \qquad A I_n = A.$$

Matrices básicas

Notación (matrices básicas). Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$ un número fijo. Para todos $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ definamos la matriz $E_{p,q}$ mediante la siguiente regla:

$$E_{p,q} = \left[\delta_{i,p}\delta_{j,q}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

42. Para $n = 3$ escriba las matrices $E_{1,3}$, $E_{2,2}$ y $E_{3,2}$.

43. Ejemplos de productos por matrices básicas. Sea $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{F})$ una matriz con entradas generales:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Calcule los productos $AE_{2,1}$, $AE_{2,2}$, $E_{2,2}A$ y $E_{1,3}A$.

44. Tabla de multiplicación de las matrices básicas de tamaño 2 × 2. Calcule todos los productos $E_{p,q}E_{r,s}$, donde $p, q, r, s \in \{1, 2\}$, y llene la siguiente tabla de multiplicación. En la entrada ubicada en la intersección del renglón $E_{p,q}$ y columna $E_{r,s}$ se escribe el producto $E_{p,q}E_{r,s}$:

	$E_{1,1}$	$E_{1,2}$	$E_{2,1}$	$E_{2,2}$
$E_{1,1}$				
$E_{1,2}$				
$E_{2,1}$				
$E_{2,2}$				

45. Matrices escalares conmutan con todas las matrices.
Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y sea $X = \lambda I_n$. Se dice que X es una *matriz escalar*. Demuestre que X conmuta con cualquier matriz Y perteneciente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \qquad XY = YX.$$

“Propiedades raras” de la multiplicación de matrices

46. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$AB \neq BA.$$

47. Construya un ejemplo de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq \mathbf{0}_{2,2}, \qquad B \neq \mathbf{0}_{2,2}, \qquad AB = \mathbf{0}_{2,2}.$$

48. Construya un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A \neq \mathbf{0}_{2,2}, \qquad A^2 = \mathbf{0}_{2,2}.$$

49. Construya un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A \neq \mathbf{0}_{3,3}, \qquad A^2 \neq \mathbf{0}_{3,3}, \qquad A^3 = \mathbf{0}_{3,3}.$$

50. Construya un ejemplo de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A \neq B, \qquad C \neq \mathbf{0}_{2,2}, \qquad AC = BC.$$

Matriz transpuesta

51. Definición de la matriz transpuesta de una matriz.
Escriba la definición de $A^\top$, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

52. La matriz transpuesta de la matriz transpuesta.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\left(A^\top\right)^\top = A.$$

53. La matriz transpuesta de la suma de dos matrices.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top.$$

54. La matriz transpuesta del producto por escalar.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

55. Teorema: la matriz transpuesta del producto de matrices.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

56. La matriz transpuesta de la matriz identidad.
Demuestre que

$$(I_n)^\top = I_n.$$

Matrices simétricas y antisimétricas

En estos problemas ponemos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

57. Criterio de la matriz simétrica.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $A^\top = A$.

(b) Para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple la igualdad $A_{j,i} = A_{i,j}$.

Cualquiera de las dos condiciones (a) y (b) se puede elegir como la definición de *matriz simétrica*.

58. Criterio de la matriz antisimétrica.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $A^\top = -A$.

(b) Para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple la igualdad $A_{j,i} = -A_{i,j}$.

Cualquiera de las dos condiciones (a) y (b) se puede elegir como la definición de *matriz antisimétrica*.

Campos de característica 2.
Se dice que $\mathbb{F}$ es un campo de característica 2 si en este campo $1 + 1 = 0$. Por ejemplo el campo $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ es un campo de característica 2, y los campos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ no son de característica 2. En los campos de característica 2 es imposible la división entre 2 porque en estos campos 2 coincide con 0.

59. Ejemplo de una matriz no nula simétrica y antisimétrica, sobre $\mathbb{F}_2$.
Las definiciones de matrices simétricas y antisimétricas se puede escribir para cualquier campo, pero sobre campos de característica 2 una matriz puede ser simétrica, antisimétrica y no nula al mismo tiempo. Construya un ejemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ que sea simétrica, antisimétrica y no nula.

60. Entradas diagonales de una matriz antisimétrica son nulas.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^\top = -A$. Demuestre que $A_{i,i} = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

61. Si una matriz compleja es simétrica y antisimétrica, entonces es nula.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y al mismo tiempo antisimétrica. Demuestre que $A = \mathbf{0}_{n,n}$.

62. Número máximo de entradas diferentes de una matriz simétrica. ¿Cuántas entradas diferentes puede tener una matriz real simétrica de orden n?.

63. Número máximo de entradas diferentes no nulas de una matriz antisimétrica. ¿Cuántas entradas diferentes y no nulas puede tener una matriz real antisimétrica de orden n?.

64. Descomposición de una matriz cuadrada en una suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.
Demuestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existe un único par de matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.

65. Suma y producto por escalar de matrices simétricas.
Demuestre que la suma y el producto por escalar de matrices simétricas son matrices simétricas. Sugerencia: use las propiedades de la matriz transpuesta.

66. Suma y producto por escalar de matrices antisimétricas.
Demuestre que la suma y el producto por escalar de matrices antisimétricas son matrices antisimétricas.

En los siguientes dos problemas se propone hacer una pequeña investigación y determinar si se cumple una propiedad o no. Se recomienda empezar con ejemplos en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

67. Producto de matrices simétricas.
Determine si el producto AB siempre es una matriz simétrica para cualesquiera matrices simétricas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o no.

68. Producto de matrices antisimétricas.
Determine si el producto AB siempre es una matriz antisimétrica para cualesquiera matrices antisimétricas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o no.

La traza de una matriz cuadrada

69. Definición de la traza de una matriz cuadrada.
Escriba la definición de $\operatorname{tr}(A)$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

70. La traza de una matriz diagonal.
Calcule $\operatorname{tr}(A)$, donde A es la matriz diagonal cuadrada $n \times n$ con entradas diagonales $d_1, \ldots, d_n$:

$$A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

71. La traza de la matriz identidad.
Calcule $\operatorname{tr}(I_n)$.

72. La traza de la suma de dos matrices.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

73. La traza del producto de una matriz por un escalar.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

74. La traza de la matriz transpuesta.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A).$$

75. Teorema: la traza del producto no depende del orden de los factores.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

76. El conmutador de dos matrices no puede ser igual a la matriz identidad.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. La matriz $AB - BA$ se llama *conmutador* de A y B. Muestre que $AB - BA \neq I_n$.

Invertibilidad de una matriz (definición y propiedades simples)

77. Definición de matriz inversa izquierda. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que B es una matriz *inversa por izquierda* a la matriz A?.

78. Definición de matriz inversa derecha. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que B es una matriz *inversa por derecha* a la matriz A?.

79. Definición de matriz inversa. Sea $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que B es una matriz *inversa* a la matriz A?.

80. Unicidad de la matriz inversa (en el caso de existencia). Sea $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$ y sean $B, C \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$ matrices cada una de las cuales es inversa a la matriz A. Demuestre que $B = C$.

81. Igualdades de las inversas izquierdas y derechas (en el caso de existencia). Sea $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$. Supongamos que $B \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$ es una matriz inversa por izquierda a la matriz A y $C \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$ es una matriz inversa por derecha a la matriz A. Demuestre que $B = C$.

82. Definición de matriz invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{F})$. ¿Cuándo se dice que A es *invertible*?.

83. Sea $\beta \in \mathbb{F}$. Usando solamente la definición de la matriz inversa demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible y calcule su inversa.

84. Ejemplo de una matriz no invertible. Basándose solamente en la definición demuestre que la siguiente matriz no es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

85. Invertibilidad de una matriz triangular de orden 2. Usando solamente la definición de la matriz inversa demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

es invertible si y sólo si $\alpha \neq 0$ y $\gamma \neq 0$. Calcule la matriz inversa (en el caso de su existencia).

86. Toda matriz que tiene un renglón nulo no es invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $A_{p,*} = 0$ donde $p \in \{1, \ldots, n\}$. Basándose en la definición de la matriz inversa demuestre que A no es invertible.

87. Toda matriz que tiene una columna nula no es invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $A_{*,p} = 0$ donde $p \in \{1, \ldots, n\}$. Basándose en la definición de la matriz inversa demuestre que A no es invertible.

88. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que $A^4 = I_n$. Demuestre que A es invertible y exprese A^{-1} a través de A.

89. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que $A^7 = 4I_n$. Demuestre que A es invertible y exprese A^{-1} a través de A.

90. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que la matriz A^5 es invertible, esto es, existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que

$$A^5 B = BA^5 = I_n.$$

Demuestre que la matriz A es invertible y exprese A^{-1} a través de A y B.

91. Invertibilidad de matrices diagonales. Demuestre que una matriz diagonal

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

es invertible si, y sólo si, todas sus entradas diagonales son distintas de cero:

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0.$$

92. Inversa de la transpuesta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible. Demuestre que $A^\top$ también es invertible y exprese $\left(A^\top\right)^{-1}$ a través de A^{-1}. Indicación: hay que encontrar una matriz B tal que

$$B\,A^\top = I_n \qquad \text{y} \qquad A^\top\,B = I_n.$$

Escriba una fórmula para B y pruebe que se cumplen las últimas dos igualdades.

93. Inversa de una matriz simétrica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz simétrica e invertible. Demuestre que la matriz A^{-1} también es simétrica.

94. Invertibilidad del producto implica la invertibilidad de los factores. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tales que la matriz AB es invertible. Demuestre que las matrices A y B también son invertibles. Indicación: muestre que A es invertible por la derecha usando las matrices $(AB)^{-1}$ y B; de manera similar muestre que A es invertible por la izquierda, B es invertible por la derecha y por la izquierda.

Matrices diagonales

Vamos a usar el término *matriz diagonal* solamente para matrices cuadradas.

95. Definición (matriz diagonal).
Escriba la definición de matriz diagonal.

Notación: la matriz diagonal con entradas diagonales $\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$.
Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Denotemos por $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a la matriz diagonal de orden n con entradas diagonales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Formalmente,

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \coloneqq \left[\alpha_i \delta_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

96. La matriz identidad es diagonal.
Demuestre que la matriz I_n es diagonal.

97. Toda matriz diagonal es simétrica.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A es simétrica.

98. Operaciones lineales con matrices diagonales.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ matrices diagonales:

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad B = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Calcule $A + B$ y λA, donde $\lambda \in \mathbb{F}$.

99. Producto de matrices diagonales.
Sean A y B matrices diagonales como en el problema anterior. Calcule su producto AB.

Matrices triangulares

Notación: matrices triangulares superiores, matrices triangulares inferiores. Denotemos por $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ al conjunto de las matrices triangulares superiores y por $\mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$ al conjunto de las matrices triangulares inferiores:

$$\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \colon \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad i > j \quad \Rightarrow \quad A_{i,j} = 0\Big\};$$

$$\mathfrak{lt}_n(\mathbb{F}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \colon \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad i < j \quad \Rightarrow \quad A_{i,j} = 0\Big\}.$$

100. Encuentre la intersección $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) \cap \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$. (Enuncie la respuesta y demuéstrela.)

101. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^\top \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})\,.$$

102. Demuestre que toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se puede escribir como una suma $U + L$ con $U \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y $L \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$.

La descomposición $L + U$ del problema anterior no es única. Muéstrelo con un ejemplo:

103. Construya algunas matrices $U_1, U_2 \in \mathfrak{ut}_2(\mathbb{R})$ y $L_1, L_2 \in \mathfrak{lt}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$U_1 \neq U_2, \qquad L_1 \neq L_2, \qquad U_1 + L_1 = U_2 + L_2.$$

Operaciones con matrices triangulares superiores:

104. Suma de matrices triangulares superiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $A + B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$.

105. Producto de una matriz triangular superior por un escalar.
Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que $\lambda A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$.

Enuncie y demuestre las propiedades similares de las operaciones con matrices triangulares inferiores.

106. Teorema del producto de dos matrices triangulares superiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $AB \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las entradas diagonales del producto AB son productos de las entradas correspondientes de A y B:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad (AB)_{i,i} = A_{i,i} B_{i,i}.$$

107. Teorema del producto de dos matrices triangulares inferiores.
Sean $A, B \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que $AB \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las entradas diagonales del producto AB son productos de las entradas correspondientes de A y B:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad (AB)_{i,i} = A_{i,i} B_{i,i}.$$

Potencias naturales de una matriz cuadrada

108. Definición inductiva de las potencias naturales de una matriz cuadrada. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Escriba la definición inductiva de A^p, donde $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

109. Calcule A^n (escriba la fórmula y demuéstrela por inducción):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

110. Calcule A^n (escriba la fórmula y demuéstrela por inducción):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

111. Calcule A^n (escriba la fórmula y demuéstrela por inducción):

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

112. Calcule A^n (escriba la fórmula y demuéstrela por inducción):

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

113. Calcule A^n. La parte no trivial consiste en obtener la fórmula correcta para la $(1, 3)$-ésima entrada de A^n.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

114. Calcule AB. Usando la fórmula obtenida calcule A^n.

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

115. Calcule A^n, donde

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}.$$