Transformaciones lineales

Problemas teóricos

En los problemas de esta lista se supone que V y W son espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$.

Linealidad de una función

1. Varias maneras de escribir la propiedad lineal. Sea $T\colon V \to W$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es aditiva y homogénea:

$$\forall a, b \in V \qquad T(a+b) = T(a) + T(b); \tag{A}$$

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad T(\lambda a) = \lambda T(a). \tag{H}$$

(b) T transforma combinaciones lineales en transformaciones lineales:

$$\forall u, v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \qquad T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v). \tag{L}$$

(c) T cumple con la siguiente propiedad:

$$\forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v). \tag{S}$$

2. Imagen del vector cero bajo una transformación lineal. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

3. Imagen de una combinación lineal bajo una transformación lineal. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demuestre por inducción que para cualquier $n \in \{1, 2, \ldots\}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in V$ y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(a_k).$$

4. Transformaciones lineales de un espacio unidimensional a un espacio vectorial. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T\colon \mathbb{F} \to V$ una transformación lineal. Demuestre que existe un vector $v \in V$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{F} \qquad T(x) = xv.$$

5. Transformaciones lineales en un espacio unidimensional. Sea $T\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ una transformación lineal. Demuestre que existe un escalar $c \in \mathbb{F}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{F} \qquad T(x) = cx.$$

Operaciones con transformaciones lineales y sus propiedades

Sean V, W algunos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Definamos operaciones lineales (suma y producto por escalar) de transformaciones lineales:

6. Suma de transformaciones lineales. Sean $T \colon V \to W$ y $U \colon V \to W$ algunas transformaciones lineales. Escriba la definición de la función $T + U$ (*suma* de T y U):

$$T + U \colon\ ?\ \to ?,$$

$$\forall v \in V \qquad (T + U)(v) \coloneqq ?$$

Demuestre que $T + U$ es lineal.

7. Producto de una escalar por una transformación lineal. Sea $T \colon V \to W$ una transformación lineal y sea $\alpha \in \mathbb{F}$. Escriba la definición de la función αT (*producto* del escalar α por la transformación T):

$$\alpha T \colon\ ?\ \to ?,$$

$$\forall v \in V \qquad (\alpha T)(v) \coloneqq ?$$

Demuestre que esta función αT es lineal.

8. Espacio vectorial de las transformaciones lineales. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$, con operaciones lineales definidas arriba. Demuestre que $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$.

9. Producto de transformaciones lineales. Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $U \in \mathcal{L}(W, X)$. La función $UT \colon V \to X$ se define como la composición $U \circ T$ y se llama el *producto* de U y T. Escriba la definición de UT de manera más formal:

$$\forall v \in V \qquad (UT)(v) \coloneqq ?$$

Demuestre que UT es lineal.

10. Propiedades distributivas y homogéneas del producto de transformaciones lineales. Sean $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, $U, U_1, U_2 \in \mathcal{L}(W, X)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que:

1. $(U_1 + U_2)T = U_1 T + U_2 T$.

2. $(\lambda U)T = \lambda(UT)$.

3. $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$.

4. $U(\lambda T) = \lambda(UT)$.

11. Propiedad asociativa de la multiplicación (composición) de transformaciones lineales. Sean V, W, X, Y espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, sean

$$T \in \mathcal{L}(V, W), \qquad U \in \mathcal{L}(W, X), \qquad S \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Demuestre que:

$$(SU)T = S(UT).$$

Ejemplos de productos de transformaciones lineales

12. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos lineas rectas en el plano que se intersectan en un punto O. En el espacio $V^2(O)$ consideremos dos transformaciones lineales:

- P es la proyección a ℓ_1 a lo largo de ℓ_2;
- Q es la proyección a ℓ_2 a lo largo de ℓ_1.

Calcule P^2, Q^2, PQ, QP, $P + Q$.

13. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos lineas rectas perpendiculares en el plano que se intersectan en un punto O. En el espacio $V^2(O)$ consideremos dos transformaciones lineales:

- P es la proyección a ℓ_1 a lo largo de ℓ_2;
- R es la rotación del plano en el ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ (en el sentido contra del reloj).

Calcule PR y RP.

14. En el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ consideremos las transformaciones lineales D y M definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \qquad && (D(f))(x) = f'(x); \\ &\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \qquad && (M(f))(x) = xf(x). \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$D(3 + 5x - 7x^2) = 5 - 14x, \qquad M(3 + 5x - 7x^2) = 3x + 5x^2 - 7x^3.$$

Calcule la transformación $DM - MD$, esto es, para todo polinomio $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ calcule $(DM - MD)(f)$.

Matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases

15. Definición de la matriz asociada a una transformación lineal. Escriba la definición de la matriz asociada a una transformación lineal con respecto a un par de bases.

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Calcule la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a la transformación $T \in \mathcal{L}(V)$ si se sabe que

$$T(a_1) = a_2, \quad T(a_2) = a_3, \quad \ldots \quad , \quad T(a_{n-1}) = a_n, \quad T(a_n) = \mathbf{0}.$$

17. Sea $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n(\mathbb{F}))$ el operador de la derivada: $D(f) \coloneqq f'$. Calcule la matriz $D_{\mathcal{E}}$ asociada a D con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$.

18. Teorema: Representación matricial de una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Demuestre que para todo $v \in V$,

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}.$$

19. Forma general de transformaciones lineales en el caso si el dominio y el contradominio coinciden con el campo. Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F})$. Demuestre que existe un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{F} \qquad T(x) = \alpha x.$$

20. Teorema: Unicidad de la representación matricial de una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ una base de W. Supongamos que $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ es una matriz tal que para todo $v \in V$,

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = M v_{\mathcal{A}}.$$

Demuestre que $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$.

21. Teorema: Cambio de la matriz asociada a una transformación lineal al cambiar las bases del dominio y del contradominio. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ bases de V, sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de W. Demuestre que:

$$T_{\mathcal{B}',\mathcal{A}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}.$$

Escriba también el caso especial de esta fórmula para $W = V$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

Correspondencia entre transformaciones lineales y matrices

22. Teorema: Una transformación lineal se determina de manera única por las imágenes de los vectores básicos. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, siendo V de dimensión finita. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sean $w_1, \ldots, w_n \in W$. Demuestre que existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad T(a_j) = w_j.$$

23. Teorema: Una transformación lineal se determina de manera única por su matriz asociada. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Sea $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M.$$

24. Matriz asociada a la suma de transformaciones lineales. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W. Sean $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que

$$(T + U)_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} + U_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

25. Matriz asociada al producto por escalar de una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$(\lambda T)_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \lambda T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

26. Matriz asociada al producto de transformaciones lineales. Sean V, W y X espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A}$ una base de V, $\mathcal{B}$ una base de W y $\mathcal{C}$ una base de X. Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W, X)$. Demuestre que

$$(UT)_{\mathcal{C},\mathcal{A}} = U_{\mathcal{C},\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

Núcleo e imagen de transformaciones lineales, problemas sencillos

27. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Escriba las definiciones de $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T)$.

28. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio de W.

29. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Demuestre que $\ker(T)$ es un subespacio de W.

30. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida mediante la siguiente fórmula:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que T es lineal, halle $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T)$.

31. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida mediante la siguiente fórmula:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad T(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que T es lineal, halle $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T)$.

32. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y sea X un subespacio de V. Demuestre $T(X)$ es un subespacio de W, donde $T(X)$ es la imagen del conjunto X bajo T:

$$T(X) \coloneqq \{T(v)\colon v \in X\} \coloneqq \{w \in W\colon \quad \exists v \in X \quad \text{tal que} \quad w = T(v)\}.$$

33. Definimos $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$T(X) \coloneqq X + X^\top.$$

Demuestre que T es lineal. Halle $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T)$.

34. Definimos $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$T(X) \coloneqq X - X^\top.$$

Demuestre que T es lineal. Halle $\operatorname{im}(T)$ y $\ker(T)$.

Núcleo e imagen de transformaciones lineales, problemas más avanzados

Los problemas de esta subsección no necesitan soluciones largas ni ideas geniales, pero impiden que el estudiante entienda las definiciones con toda claridad.

35. Sean V, W, X espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W, X)$. Demuestre que

$$\ker(T) \subset \ker(UT), \qquad \operatorname{im}(UT) \subset \operatorname{im}(U).$$

36. Dé un ejemplo de espacio vectorial V y transformaciones lineales $T, U \in \mathcal{L}(V)$ tales que

$$\ker(T) \neq \ker(UT).$$

37. Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, X)$ tales que $ST = \mathbf{0}$. Demuestre que $\operatorname{im}(T) \subset \ker(S)$.

38. Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, X)$ tales que $\operatorname{im}(T) \subset \ker(S)$. Demuestre que $ST = \mathbf{0}$.

39. Haga un resumen de los dos problemas anteriores.

40. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\ker(T^2) = \ker(T)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

41. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\operatorname{im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Demuestre que $\ker(T^2) = \ker(T)$.

42. Haga un resumen de los dos problemas anteriores.

43. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(T + S) \subset \operatorname{im}(T) + \operatorname{im}(S).$$

44. Dé un ejemplo de transformaciones lineales $T, U \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tales que

$$\operatorname{im}(T + S) \subsetneq \operatorname{im}(T) + \operatorname{im}(S).$$

45. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que

$$\operatorname{r}(T + S) \leq \operatorname{r}(T) + \operatorname{r}(S).$$

Construcción de bases en el núcleo y en la imagen de una transformación lineal

46. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ tales que $\ell(a_1, \ldots, a_n) = V$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(T) = \ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)).$$

47. Teorema del rango y nulidad. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, donde V es de dimensión finita. Demuestre que

$$\operatorname{r}(T) + \operatorname{nul}(T) = \dim(V),$$

esto es,

$$\dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Proyecciones y sumas directas

Definición (proyección). Sea V un espacio vectorial y sea $P \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que P es una *proyección* si P cumple con la propiedad *idempotente*:

$$P^2 = P.$$

48. Proyección complementaria. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección, esto es, $P^2 = P$. Demuestre que la transformación $Q \coloneqq I - P$ también es una proyección. Calcule los productos

$$PQ \qquad \text{y} \qquad QP.$$

49. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$ y sea $Q = I - P$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(P) = \ker(Q) \qquad \text{y} \qquad \ker(P) = \operatorname{im}(Q).$$

50. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección, esto es, $P^2 = P$. Demuestre que

$$\operatorname{im}(P) = \{v \in V : P(v) = v\}.$$

51. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Demuestre que el espacio V es la suma directa de $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$.

Transformaciones lineales inyectivas

52. Criterio de que un transformación lineal es inyectiva. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que T es inyectiva si y sólo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

53. Imágenes de vectores linealmente independientes bajo una transformación lineal inyectiva son linealmente independientes. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ inyectiva y sean $a_1, \ldots, a_k \in V$ vectores linealmente independientes. Demuestre que los vectores $T(a_1), \ldots, T(a_k)$ son linealmente independientes.

54. Si el producto de dos transformaciones lineales es inyectivo, entonces el segundo factor es inyectivo. Sean V, W, X espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W)X$. Supongamos que el producto UT es una transformación inyectiva. Demuestre que T también es inyectiva.

Transformaciones lineales suprayectivas

55. Imagen de un conjunto generador bajo una transformación lineal suprayectiva. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ suprayectiva y sean $a_1, \ldots, a_k \in V$ tales que $\ell(a_1, \ldots, a_k) = V$. Demuestre que $\ell(T(a_1), \ldots, T(a_k)) = W$.

56. Si el producto de dos transformaciones lineales es suprayectivo, entonces el primerr factor es suprayectivo. Sean V, W, X espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W)X$. Supongamos que el producto UT es una transformación suprayectiva. Demuestre que T también es suprayectiva.

Invertibilidad de transformaciones lineales

57. Linealidad de la función inversa a una transformación lineal. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transformación lineal biyectiva. Demuestre que su inversa T^{-1} también es una transformación lineal.

58. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que la transformación T^2 es invertible y denotemos su inversa por U. Demuestre que T es invertible y exprese T^{-1} a través de T y U.

59. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = 5I$. Demuestre que T es invertible y encuentre la inversa de T.

60. Criterio de la invertibilidad de una transformación lineal bajo la condición que el dominio y el contradominio son de la misma dimensión finita. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, donde $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es invertible.

(b) T es inyectiva, o sea $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(c) T es suprayectiva, o sea $\operatorname{im}(T) = W$.

Espacios vectoriales isomorfos

61. Demuestre que las siguientes propiedades de la isomorfía de espacios vectoriales:

1. $V \cong V$.
2. Si $V \cong W$, entonces $W \cong V$.
3. Si $V \cong W$ y $W \cong X$, entonces $V \cong X$.

62. Teorema: Todo isomorfismo de espacios vectoriales transforma cualquier base del dominio en una base del contradominio. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un isomorfismo y sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Demuestre que $(T(e_1), \ldots, T(e_n))$ es una base de W.

63. Corolario: Si dos espacios vectoriales son isomorfos y uno de estas es de dimensión finita, entonces el otro es de la misma dimensión finita. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un isomorfismo, donde V es de dimensión finita n. Entonces $\dim(W) = n$.

Cada uno de los dos siguientes teoremas es un corolario simple del otro.

64. Teorema: todo espacio vectorial de dimensión n sobre un campo $\mathbb{F}$ es isomorfo a $\mathbb{F}^n$. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo $\mathbb{F}$. Construya un isomorfismo $T\colon \mathbb{F}^n \to V$.

65. Teorema: Espacios vectoriales sobre un mismo campo y de la misma dimensión finita son isomorfos. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y de la misma dimensión finita. Construya un isomorfismo $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

66. Muestre que el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{F}^{mn}$.

67. Muestre que el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{F}^{n+1}$.