Transformaciones lineales
en espacios con producto interno

Problemas teóricos

La lista de problemas todavía no está completa.

Definición de la transformación adjunta

En los problemas de esta sección se supone que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

1. Definición de transformación lineal adjunta. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ con productos internos, sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, V)$. ¿Cuándo se dice que la transformación S es *adjunta* a la transformación T?. Escriba la definición.

2. Unicidad de la transformación lineal adjunta. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ con algunos productos internos y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Muestre que si $S_1 \in \mathcal{L}(W, V)$ es adjunta a T y $S_2 \in \mathcal{L}(W, V)$ es adjunta a T, entonces $S_1 = S_2$.

3. Existencia de una transformación lineal adjunta (el caso de dimensión finita). Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$ con algunos productos internos, siendo W de dimensión finita. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que existe una transformación lineal $S \in \mathcal{L}(W, V)$ adjunta a T.

4. Transformación adjunta de la suma de dos transformaciones lineales y del producto de un escalar por una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales complejos con algunos productos internos, siendo W de dimensión finita.

1. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.
2. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

5. Transformación adjunta del producto de transformaciones lineales. Sean V, W, X espacios vectoriales complejos con algunos productos internos, siendo W y X de dimensiones finitas. Si $T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(W, X)$, entonces

$$(T_2 T_1)^* = T_1^* T_2^*.$$

6. Transformación adjunta de una transformación lineal invertible. Sean V y W espacios vectoriales complejos con algunos productos internos, siendo W de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ invertible. Muestre que T^* es invertible y que

$$\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*.$$

Tranformación adjunta y matriz adjunta

7. Sean V y W algunos espacios vectoriales complejos, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases ortogonales en V y W y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que

$$(T^*)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{A},\mathcal{B}})^*.$$

8. Consideremos el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con el siguiente producto interno:

$$\langle X, Y \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(X^\top Y).$$

Para cualquier matriz fija $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definamos la transformación $L_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ por la regla de correspondencia

$$L_A(X) \coloneqq AX.$$

Encuentre la transformación $(L_A)^*$.

9. Consideremos el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con producto interno

$$\langle X, Y \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(X^* Y).$$

Para cualquier matriz fija $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definamos la transformación lineal $L_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ por la regla de correspondencia

$$L_A(X) \coloneqq AX.$$

Encuentre la transformación $(L_A)^*$.

10. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Denotemos por $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n = 1$ a los coeficientes del polinomio característico de A:

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Calcule los coeficientes del polinomio característico de la matriz A^*.

Operadores y matrices autoadjuntos

11. Conmutador de operadores autoadjuntos. Sea V un espacio euclidiano o unitario y sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ transformaciones autoadjuntas. Demuestre que su conmutador $ST - TS$ tiene forma $\mathrm{i}\, U$, donde U es una transformación autoadjunta. En otras palabras, demuestre que la transformación $\frac{1}{\mathrm{i}}(ST - TS)$ es autoadjunta.

12. Conmutador de matrices autoadjuntas. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrices autoadjuntas. Demuestre que su conmutador $AB - BA$ tiene forma $\mathrm{i}\, C$, donde C es una matriz autoadjunta. En otras palabras, demuestre que la matriz $\frac{1}{\mathrm{i}}(AB - BA)$ es autoadjunta.

13. Dé un ejemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que A no sea autoadjunta y A^2 sea autoadjunta.

14. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = A^*$. Demuestre que $I + \mathrm{i}\, A$ es invertible.

15. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ autoadjunta. Demuestre que la matriz $\exp(\mathrm{i}\, A)$ es unitaria.

Operadores positivos y matrices positivas

16. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz positiva, esto es, $A = A^*$ y $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal D con entradas diagonales no negativas tal que $A = UDU^{-1}$.

Operadores y matrices ortogonales

17. Sea V un espacio euclidiano. Demuestre que el conjunto $O(V)$ de todos los operadores ortogonales de V es un grupo.

18. Demuestre que el conjunto $O_n(\mathbb{R})$ de todas las matrices ortogonales de orden n es un grupo.

19. Demuestre que cualquier matrices de forma

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

pertenece a $O_2(\mathbb{R})$ y tiene determinante 1.

20. Demuestre que cualquier matriz $A \in O_2(\mathbb{R})$ con determinante 1 tiene forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Operadores unitarios y matrices unitarias

21. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Muestre que la siguiente matriz es unitaria:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \begin{bmatrix} a+b\,\mathrm{i} & -c+d\,\mathrm{i} \\ c+d\,\mathrm{i} & a-b\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Proyecciones ortogonales

22. Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $P^2 = P$ y $P^* = P$.

(b) existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}PU$ tiene forma $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Transformaciones y matrices normales

23. Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que sea normal pero no sea diagonal ni autoadjunta.

24. Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que A no sea normal y A^2 sea normal.

25. Sea V un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal y nilpotente. Lo último significa que $T^k = \mathbf{0}$ para algún k. Demuestre que $T = \mathbf{0}$.

26. Sea V un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal. Demuestre que para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\ker(T^k) = \ker(T).$$

27. Sea V un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ un polinomio. Demuestre que la transformación $f(T)$ es normal.

28. Ejercicio (vectores propios de una transformación normal asociados a diferentes valores propios son ortogonales entre si). Sea V un espacio euclidiano o unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal, sean $u, v \in V$ tales que $Tu = \lambda u$, $Tv = \mu v$, $\lambda \neq \mu$. Demuestre que $u \perp v$.