Funcionales lineales

Problemas teóricos

Definición y propiedades de funcionales lineales

En los siguientes problemas se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Definición de funcional lineal y del espacio dual. Escriba la definición de funcional lineal. Escriba la definición del espacio dual.

2. Suma de funcionales lineales. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Escriba la definición de $\varphi + \psi$ y demuestre que $\varphi + \psi \in V^*$.

3. Producto de un escalar por un funcional lineal. Sea $\varphi \in V^*$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Escriba la definición de $\lambda\varphi$ y demuestre que $\lambda\varphi \in V^*$.

Imagen y núcleo de un funcional lineal

En los siguientes problemas se supone que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

4. Imagen y núcleo del funcional lineal nulo. Sea $\varphi = \mathbf{0}_{V^*}$, esto es, $\varphi(v) = 0$ para todo $v \in V$. Calcule $\operatorname{im}(\varphi)$ y $\ker(\varphi)$.

5. Sea $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq \mathbf{0}_{V^*}$, y sea $a \in V$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Demuestre que para todo $v \in V$ existe un $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $v - \lambda a \in \ker(\varphi)$.

6. Sea $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq \mathbf{0}_{V^*}$, y sea $a \in V$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Demuestre que V es la suma directa de los subespacios $\ell(a)$ y $\ker(\varphi)$.

7. Sea $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq \mathbf{0}_{V^*}$. Halle $\operatorname{im}(\varphi)$.

Base dual

8. Definición y la propiedad principal de los funcionales lineales que forman la base dual. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos al funcional $\chi_i \colon V \to \mathbb{F}$ mediante la siguiente regla:

$$\chi_i(v) = \bigl(v_{\mathcal{A}}\bigr)_i,$$

es decir, $\chi_i(v)$ es la i-ésima coordenada de v respecto a la base $\mathcal{A}$. Demuestre que χ_i es lineal y que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\chi_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

La demostración de que $\chi_1, \ldots, \chi_n$ se divide en dos partes que escribimos como dos siguientes problemas.

9. Expansión de los funcionales lineales en la base dual (parte del teorema de la base dual). Sean V, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\chi_1, \ldots, \chi_n$ los mismos que en el problema anterior. Demuestre que para todo funcional $\varphi \in V^*$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\chi_i.$$

10. Independencia de los funcionales lineales que forman la base dual. Sean V, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\chi_1, \ldots, \chi_n$ los mismos que en el problema anterior. Demuestre que $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son linealmente independientes.

Expansión de funcionales en la base dual

11. La traza de matrices. Sea $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ y sea $\Phi = (\chi_{1,1}, \chi_{1,2}, \chi_{2,1}, \chi_{2,2})$ la base dual a $\mathcal{E}$. Calcule las coordenadas del funcional $\operatorname{tr} \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ respecto a la base $\mathcal{E}$.

12. Evaluación de los polinomios en un punto. Sea $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$:

$$e_0(t) = 1, \qquad e_1(t) = t, \qquad e_2(t) = t^2, \qquad e_3(t) = t^3.$$

y sea $\Phi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ la base dual a $\mathcal{E}$. Sea $c \in \mathbb{F}$. Denotemos por eval_c al funcional de evaluación de los polinomios en el punto c:

$$\operatorname{eval}_c(P) = P(c).$$

Calcule las coordenadas del funcional eval_c respecto a la base Φ.

13. Evaluación de la derivada de los polinomios en un punto. Denotemos por $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ a la base canónica del espacio $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$:

$$e_0(t) = 1, \qquad e_1(t) = t, \qquad e_2(t) = t^2, \qquad e_3(t) = t^3.$$

Sea $\Phi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ la base dual a $\mathcal{E}$. Sea $c \in \mathbb{F}$. Consideremos al funcional φ que evalúa la derivada de los polinomios en el punto c:

$$\varphi(P) = P'(c).$$

Calcule las coordenadas del funcional eval_c respecto a la base Φ.

14. Integración de los polinomios. Sea $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$e_0(t) = 1, \qquad e_1(t) = t, \qquad e_2(t) = t^2, \qquad e_3(t) = t^3.$$

y sea $\Phi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ la base dual a $\mathcal{E}$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Denotemos por int_a^b al funcional de integración de los polinomios en el intervalo $[a, b]$:

$$\operatorname{int}_a^b(P) = \int_a^b P(t)\, dt.$$

Calcule las coordenadas del funcional int_a^b respecto a la base Φ.

Representación matricial de funcionales lineales

15. Representación matricial de funcionales lineales. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $\Psi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ la base dual a la base $\mathcal{A}$. Demuestre que para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in V^*$

$$\varphi(v) = \varphi_\Phi^\top v_\mathcal{A}.$$

16. Unicidad de la representación matricial de funcionales lineales. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $\Psi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ la base dual a la base $\mathcal{A}$. Sean $\varphi \in V^*$ y $u \in \mathbb{F}^n$ tales que

$$\forall v \in V \qquad \varphi(v) = u^\top v_\mathcal{A}.$$

Demuestre que $\varphi_\Psi = u$.

17. Cambio de la base dual al cambiar la base del espacio. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Denotemos por Φ y Ψ a las bases duales a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Exprese la matriz $P_{\Phi,\Psi}$ a través de la matriz $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Espacio bidual

18. Teorema de la separación de un punto y un subespacio. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea S un subespacio de V y sea $w \in V \setminus S$. Construya un funcional lineal $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(w) = 1$ y $\varphi(v) = 0$ para todo $v \in S$.

19. Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $w \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Demuestre que existe un funcional lineal $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(w) \neq 0$.

20. Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $w \in V$ tal que $\varphi(w) = 0$ para todo $\varphi \in V^*$. Demuestre que $w = \mathbf{0}$.

21. Definición del espacio dual. Escriba la definición del espacio dual.

22. Funcional del espacio bidual asociado a un vector. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $v \in V$. Denotemos por $\Lambda(v)$ a la función

$$\Lambda(v)\colon V^* \to \mathbb{F}, \qquad (\Lambda(v))(\varphi) \coloneqq \varphi(v).$$

Demuestre que $\Lambda(v) \in V^{**}$.

23. Teorema del isomorfismo canónico entre el espacio vectorial y su espacio bidual. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$. Demuestre que la función $\Lambda\colon V \to V^{**}$ definida por

$$(\Lambda(v))(\varphi) \coloneqq \varphi(v)$$

es un isomorfismo de V sobre V^{**}.

Anuladores

Definición (anulador de un subconjunto de un espacio vectorial). Dado un subconjunto X de un espacio vectorial V, denotamos por X^0 al anulador X, esto es, al conjunto de todos los funcionales que anulan a todos los vectores de X:

$$X^0 \coloneqq \{f \in V^*\colon \quad \forall v \in X \quad f(v) = 0\}.$$

Definición (anulador de un subconjunto del espacio dual). Sea V un espacio vectorial. Dado un subconjunto F del espacio dual V^*, denotamos por F^0 al anulador de F, esto es, al conjunto de todos los vectores que se anulan por todos los funcionales pertenecientes a F:

$$F^0 \coloneqq \{v \in V\colon \quad \forall f \in F \quad f(v) = 0\}.$$

24. Encuentre una base de S^0, donde S es el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

25. Encuentre una base de S^0, donde S es el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

26. Propiedad antimonótona del anulador. Sean X, Y subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $X \subset Y$. Demuestre que $Y^0 \subset X^0$.

27. Anulador del subespacio generado por un conjunto coincide con el anulador del conjunto original. Sea V un espacio vectorial y sea $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto finito de V. Denotemos por S al subespacio de V generado por X: $S = \ell(X)$. Demuestre que el anulador de X coincide con el anulador de S:

$$X^0 = S^0.$$

28. Dimensión del anulador. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Demuestre que

$$\dim(S^0) = \dim(V) - \dim(S).$$

29. Anulador del anulador de un subespacio. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Demuestre que

$$(S^0)^0 = S.$$

30. Anulador del anulador de un conjunto finito. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto finito de V. Denotemos por S al subespacio generado por X: $S = \ell(X)$. Demuestre que el anulador del anulador de X es igual a S:

$$(X^0)^0 = S.$$

31. Anulador de la suma de subespacios. Sea V un espacio vectorial y sean S_1, S_2 subespacios de V. Demuestre que

$$(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0.$$

32. Anulador de la intersección de subespacios. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean S_1, S_2 subespacios de V. Demuestre que

$$(S_1 \cap S_2)^0 = S_1^0 + S_2^0.$$