Espacios vectoriales con producto interno

Problemas teóricos

En todos los problemas relacionados con el caso complejo se supone que el producto interno es lineal con respecto al *segundo* argumento.

Definición de producto interno

1. Escriba la definición de producto interno en un espacio vectorial real.

2. Escriba la definición de producto interno en un espacio vectorial complejo.

En los siguientes dos problemas estudiamos dependencias lógicas entre las condiciones en la definición de producto interno.

3. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una función lineal con respecto al segundo argumento y hermitiana:

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} && f(a, \lambda b + \mu c) = \lambda f(a, b) + \mu f(a, c); \\ &\forall a, b \in V && f(b, a) = \overline{f(a, b)}. \end{aligned}$$

Demuestre que f es lineal conjugada con respecto al primer argumento.

En los siguientes problemas se supone que V es un espacio vectorial complejo con producto interno. El caso real es similar, pero más simple.

4. Demuestre por inducción que para cualquier $p \in \{1, 2, \ldots\}$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_p, b \in V$ se cumple la igualdad

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \langle a_j, b \rangle.$$

5. Usando el resultado del problema anterior y propiedades del producto interno demuestre que para cualquier $q \in \{1, 2, \ldots\}$ y cualesquiera $a, b_1, \ldots, b_q \in V$ se cumple la igualdad

$$\left\langle a, \sum_{k=1}^{q} b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} \langle a, b_k \rangle.$$

6. Sean $a, b \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Usando propiedades del producto interno simplifique la expresión $\langle \lambda a, \mu b \rangle$.

7. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno, sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Calcule

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j,\ \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k \right\rangle.$$

Matriz adjunta (transpuesta conjugada).
Propiedades de la “transposición conjugada”

Definición de la matriz adjunta (transpuesta conjugada). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces la matriz *adjunta* (*transpuesta conjugada*) a la matriz A se denota por A^* y se define como la matriz transpuesta conjugada a la matriz A:

$$A^* := \overline{A}^\top.$$

En otras palabras,

$$A^* := \left[\,\overline{A_{k,j}}\,\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Para demostrar las siguientes propiedades se recomienda usar propiedades de la operación $A \mapsto A^\top$ y propiedades simples de la conjugación compleja.

8. Propiedades lineales de la matriz adjunta. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*.$$

9. Matriz adjunta del producto de matrices. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

10. Matriz adjunta a la matriz adjunta. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$(A^*)^* = A.$$

Para resolver el siguiente problema hay que recordar las definiciones formales de la traza de una matriz y del producto de matrices.

11. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Exprese $\operatorname{tr}(A^*B)$ en términos de las entradas de A y B.

12. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Exprese $\operatorname{tr}(A^*A)$ en términos de las entradas de A.

Ejemplos de espacios vectoriales con producto interno

13. Producto-punto en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{1}$$

14. Producto interno canónico en el espacio de las matrices reales. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(A^\top B). \tag{2}$$

Sugerencia: para demostrar que $\langle A, A \rangle > 0$ para cualquier matriz no nula A, exprese $\langle A, A \rangle$ en términos de las entradas de A.

15. Expresión del producto-punto usando la transposición y la multiplicación de matrices. Muestre que el producto-punto en $\mathbb{R}^n$ definido por la fórmula (1) se puede escribir como

$$\langle x, y \rangle = x^\top y.$$

16. Producto-punto en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k. \tag{3}$$

17. Producto interno canónico en el espacio de las matrices complejas. Demuestre que la siguiente función es un producto interno en el espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$:

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(A^* B).$$

Sugerencia: para demostrar que $\langle A, A \rangle > 0$ para cualquier matriz no nula A, exprese $\langle A, A \rangle$ en términos de las entradas de A.

18. Expresión del producto-punto en $\mathbb{C}^n$ usando la transposición conjugada y la multiplicación de matrices. Muestre que el producto-punto en $\mathbb{C}^n$ definido por la fórmula (3) se puede escribir como

$$\langle x, y \rangle = x^* y.$$

Proyección ortogonal de un vector a otro vector no nulo

19. Proyección ortogonal de un vector a un vector no nulo. Sea $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y sea $v \in V$. Demuestre que existe un único escalar λ tal que

$$v - \lambda a \perp a.$$

El vector λa con este valor λ se denota por $\operatorname{pr}_a(v)$ y se llama la *proyección ortogonal* del vector v al vector a (o la proyección ortogonal del vector v al subespacio generado por el vector a).

20. Otra forma de la misma proposición. Sean $a, v \in V$, $a \neq \mathbf{0}$. Demuestre que existe un único par de vectores $(u, w) \in V \times V$ tal que

$$u \in \ell(a), \qquad w \perp a, \qquad u + w = v.$$

21. Operador de proyección ortogonal a un vector no nulo. Sea $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Consideremos la función $P_a \colon V \to V$ definida mediante la regla

$$P_a(v) \coloneqq \operatorname{pr}_a(v).$$

Escriba $P_a(v)$ de manera explícita y demuestre que P_a es un operador lineal.

22. Propiedad idempotente de la proyección ortogonal a un vector no nulo. Sea $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Demuestre que

$$P_a^2 = P_a.$$

Desigualdad de Schwarz

23. Un cálculo auxiliar para demostrar la desigualdad de Schwarz. Sean $a, b \in V$, $a \neq \mathbf{0}$,

$$\lambda \coloneqq \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle}.$$

Simplifique la expresión

$$\langle b - \lambda a, b - \lambda a \rangle.$$

La desigualdad de Schwarz es también conocida como la desigualdad de Cauchy–Schwarz o la desigualdad de Cauchy–Bunyakovski–Schwarz.

24. Desigualdad de Schwarz. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in V$. Demuestre que

$$\bigl|\langle a, b \rangle\bigr|^2 \leq \langle a, a \rangle \, \langle b, b \rangle.$$

Sugerencia: considere dos casos: 1) $a = \mathbf{0}$ y 2) $a \neq \mathbf{0}$.

Norma inducida por un producto interno

25. Definición de norma. Escriba la definición de norma en un espacio vectorial complejo.

26. Dos propiedades de números complejos (repaso). Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\operatorname{Re}(\alpha) \le |\alpha|, \qquad \alpha + \overline{\alpha} = 2\operatorname{Re}(\alpha).$$

27. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $u, v \in V$. Demuestre que

$$\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 2\operatorname{Re}(\langle u, v\rangle).$$

28. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $u, v \in V$. Desarrolle los productos:

$$\langle u + v, u + v\rangle, \qquad \langle u - v, u - v\rangle.$$

29. Teorema sobre la norma inducida por un producto interno. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la función $N\colon V \to [0, +\infty)$ definida mediante la siguiente fórmula es una norma:

$$N(v) \coloneqq \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

La parte principal del teorema es el siguiente problema:

30. Desigualdad triangular para la norma inducida por un producto interno. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $u, v \in V$. Demuestre que

$$\sqrt{\langle u + v, u + v\rangle} \le \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

31. Identidad de paralelogramo. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Denotemos por $\|\cdot\|$ a la norma inducida por el producto interno. Demuestre que para cualesquiera $u, v \in V$ se cumple la igualdad

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big).$$

32. Norma-∞ no está inducida por ningún producto interno. La norma $\|\cdot\|_\infty$ se define en $\mathbb{C}^2$ de la siguiente manera:

$$\forall z \in \mathbb{C}^2 \qquad \|z\|_\infty \coloneqq \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Demuestre que no existe ningún producto interno en $\mathbb{C}^2$ que induzca a esta norma. Sugerencia: muestra con algún ejemplo numérico que la norma $\|\cdot\|_\infty$ no satisface la identidad de paralelogramo.

33. Norma-1 no está inducida por ningún producto interno. La norma $\|\cdot\|_1$ se define en $\mathbb{C}^2$ de la siguiente manera:

$$\forall z \in \mathbb{C}^2 \qquad \|z\|_1 := |z_1| + |z_2|.$$

Demuestre que no existe ningún producto interno en $\mathbb{C}^2$ que induzca a esta norma.

34. Identidades de polarización en el caso real. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interno. Demuestre las siguientes identidades que permiten expresar el producto interno a través de la norma inducida por él mismo:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

35. Identidad de polarización en el caso complejo. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interno. Demuestre la identidad de polarización:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|\mathrm{i}^k\, u + v\|^2.$$

Distancia inducida por una norma

36. Escriba la definición general de distancia (métrica).

37. Distancia inducida por una norma. Sean V un espacio vectorial complejo y sea $\|\cdot\|$ una norma en V. Demuestre que la función $d\colon V^2 \to [0, +\infty)$ definida mediante la siguiente fórmula es una distancia (métrica):

$$\forall a, b \in V \qquad d(a, b) := \|a - b\|.$$

38. Expresión de la norma por la distancia inducida. Sean V un espacio vectorial complejo y sea $\|\cdot\|$ una norma en V. Denotemos por d a la distancia inducida por $\|\cdot\|$. Sea $v \in V$. Exprese $\|v\|$ en términos de d.

39. Distancia inducida por un producto interno. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces el producto interno induce a una norma que denotamos por $\|\cdot\|$, y esta norma a su vez induce a una distancia que denotamos por d. Exprese $d(a, b)$ en términos de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Ortogonalidad de vectores

En los problemas de esta sección se supone que V es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición: vector es ortogonal a un conjunto. Sea $v \in V$ y sea $X \subseteq V$. Se dice que v es *ortogonal* a X y se escribe $v \perp X$ si para todo $x \in X$ se tiene que $v \perp x$.

Definición: conjuntos ortogonales. Sean $X, Y \subseteq V$. Se dice que X y Y son *ortogonales* (o que X es *ortogonal* a Y) si

$$\forall x \in X \qquad \forall y \in Y \qquad x \perp y.$$

40. ¿Cuál vector es ortogonal a sí mismo?. Encuentre todos los vectores $u \in V$ que tienen la propiedad que $u \perp u$.

41. ¿Cuál vector es ortogonal a todos los vectores del espacio?. Encuentre todos los vectores $u \in V$ que tienen la propiedad que $u \perp V$.

42. Criterio de la ortogonalidad de un vector al subespacio generado por una lista de vectores. Sea $v \in V$ y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que:

$$v \perp \ell(a_1, \ldots, a_m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad v \perp a_j.$$

43. Criterio de la ortogonalidad de un vector al subespacio generado por un conjunto de vectores. Sea $v \in V$ y sea $X \subseteq V$. Demuestre que:

$$v \perp \ell(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v \perp X.$$

Listas ortogonales y ortonormales de vectores

Se supone que V es un espacio vectorial real o complejo con producto interno.

44. Definición de vectores ortogonales. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Explique qué significa la frase: los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son (mutualmente) ortogonales.

45. Definición de vectores ortonormales. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Explique qué significa la frase: los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales.

46. Coeficientes de una combinación lineal de vectores ortogonales no nulos. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales no nulos en V y sea v una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Exprese λ_j a través de ciertos productos internos.

47. Coeficientes de una combinación lineal de vectores ortonormales. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortonormales en V y sea v una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_m$:

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Exprese los coeficientes λ_j a través de ciertos productos internos.

48. Independencia lineal de vectores ortogonales no nulos. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales no nulos en V. Demuestre que $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes.

49. Teorema de Pitágoras. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortogonales en V. Demuestre que

$$\|a_1 + \ldots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \ldots + \|a_m\|^2.$$

50. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores mutualmente ortogonales en V y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Demuestre que los vectores $\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_m a_m$ son mutualmente ortogonales.

51. Fórmula de Pitágoras–Parseval. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores mutualmente ortogonales en V y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\|\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + \ldots + |\lambda_m|^2 \, \|a_m\|^2.$$

Proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por vectores ortogonales

52. Teorema de la proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por vectores ortogonales no nulos. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores ortogonales no nulos en V y sea $v \in V$. Denotemos por S al subespacio generado por $a_1, \ldots, a_m$:

$$S \coloneqq \ell(a_1, \ldots, a_m).$$

Demuestre que existe un único par de vectores (u, w) tal que

$$v = u + w, \qquad u \in S, \qquad w \perp S. \tag{4}$$

53. Plan de demostración de la unicidad. Se supone que u y w cumplen con (4).

1. Demuestre que $\langle a_j, v \rangle = \langle a_j, u \rangle$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
2. u debe ser de la forma $u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j$ con algunos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
3. Demuestre que
$$u = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle a_j, v \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle}\, a_j, \qquad w = v - u. \tag{5}$$

54. Plan de demostración de la existencia. Definimos u y w por las fórmulas (5).

1. Demuestre que $\langle a_j, v \rangle = \langle a_j, u \rangle$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
2. Demuestre que $w \perp a_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.
3. Demuestre que $w \perp S$.

55. En las condiciones del teorema, demuestre que

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \qquad \|u\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{|\langle a_j, v \rangle|^2}{\langle a_j, a_j \rangle}.$$

56. En las condiciones del teorema, escriba u en términos de $\operatorname{pr}_{a_j}(v)$.

57. Desigualdad de Bessel. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores ortonormales y sea $v \in V$. Demuestre que

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle a_j, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

58. Criterio de la pertenencia de un vector al subespacio generado por una lista de vectores ortogonales no nulos. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ vectores ortogonales no nulos en V y sea $v \in V$. Denotemos por S al subespacio generado por $a_1, \ldots, a_m$:

$$S = \ell(a_1, \ldots, a_m).$$

Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$.

(b) $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle a_j, v\rangle}{\langle a_j, a_j\rangle}\, a_j$.

(c) Se cumple la igualdad de Pitágoras–Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{|\langle a_j, v\rangle|^2}{\langle a_j, a_j\rangle}.$$

Matriz de Gram de una lista de vectores

Se supone que V es un espacio vectorial real o complejo con producto interno.

59. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Escriba de definición de la matriz de Gram de los vectores $a_1, \ldots, a_m$.

60. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demuestre que la matriz de Gram $G(a_1, \ldots, a_m)$ es autoadjunta:

$$G(a_1, \ldots, a_m)^* = G(a_1, \ldots, a_m).$$

61. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Escriba las siguientes condiciones en términos de la matriz de Gram $G(a_1, \ldots, a_m)$.

- $a_1, \ldots, a_m$ son ortogonales $\quad\Longleftrightarrow\quad$?.
- $a_1, \ldots, a_m$ son ortonormales $\quad\Longleftrightarrow\quad$?.

62. Cálculo de la matriz de Gram de una lista de vectores en términos de sus coordenadas con respecto a una base ortonormal. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de V y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Denotemos por C a la matriz cuyas columnas son vectores de coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_m$ con respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$C \coloneqq \big[(a_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (a_m)_{\mathcal{B}}\big].$$

Demuestre que

$$G(a_1, \ldots, a_m) = C^* C.$$

63. Sean $a_1, a_2, a_3 \in V$ y sean

$$u_1 = a_1, \qquad u_2 = a_2 + 5a_1, \qquad u_3 = a_3.$$

Exprese la matriz de Gram $G(u_1, u_2, u_3)$ como la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$ multiplicada por ciertas matrices elementales.

Ortogonalización de Gram–Schmidt

Se supone que V es un espacio vectorial real o complejo con producto interno.

64. Proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Escriba cómo se definen los vectores $b_1, \ldots, b_m$ en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

65. Ortogonalidad de los vectores construídos en el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sean $b_1, \ldots, b_m$ los vectores construídos de $a_1, \ldots, a_m$ en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Demuestre que los vectores $b_1, \ldots, b_m$ son mutualmente ortogonales.

66. Demuestre que si $a_1, \ldots, a_m$ son ortogonales, entonces $b_1 = a_1, \ldots, b_m = a_m$.

67. Ejemplo: polinomios de Legendre. En el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ definamos el producto interno por la regla

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Aplique el método de Gram-Schmidt a los siguientes polinomios (monómios):

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2, \qquad e_3(x) = x^3.$$

Los polinomios $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ obtenidos en este proceso son los primeros *polinomios de Legendre* (salvo múltiplos constantes).

68. Conservación de los subespacios generados en el proceso de Gram–Schmidt (caso particular de tres vectores). Sean a_1, a_2, a_3 vectores de un espacio vectorial V con producto interno y sean b_1, b_2, b_3 los vectores que se obtienen de a_1, a_2, a_3 al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. Demuestre que el subespacio S_1 generado por a_1, a_2, a_3 coincide con el subespacio S_2 generado por b_1, b_2, b_3.

69. Teorema: conservación de los subespacios generados en el proceso de Gram–Schmidt. Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores de un espacio vectorial V con producto interno y sean $b_1, \ldots, b_m$ los vectores que se obtienen de $a_1, \ldots, a_m$ al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. Demuestre que para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\ell(a_1, \ldots, a_j) = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

70. Corolario (criterio para que se obtenga un vector cero en el proceso de Gram–Schmidt). Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema. Demuestre que para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$a_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_j = \mathbf{0}.$$

71. Corolario (criterio de independencia lineal de vectores en términos de los vectores obtenidos en el proceso de Gram–Schmidt). Sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores de un espacio vectorial V con producto interno y sean $b_1, \ldots, b_m$ los vectores que se obtienen de $a_1, \ldots, a_3$ al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Demuestre que los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes si, y sólo si, todos los vectores $b_1, \ldots, b_m$ son no nulos.

Bases ortogonales y ortonormales

72. Escriba la definición de base ortogonal.

73. Escriba la definición de base ortonormal.

74. Escriba la definición de espacio euclideano.

75. Escriba la definición de espacio unitario.

76. Extensión de una lista ortogonal a una base ortogonal. Sea V un espacio euclideano o unitario de dimensión n y sean $w_1, \ldots, w_m \in V$ vectores ortogonales no nulos ($m < n$). Demuestre que existen vectores $w_{m+1}, \ldots, w_n \in V$ tales que $w_1, \ldots, w_n$ es una base ortogonal.

77. Existencia de una base ortonormal en un espacio euclideano o unitario. Demuestre que en todo espacio euclideano o unitario existe una base ortonormal.

78. Criterio para que una lista ortonormal de vectores sea una base. Sea V un espacio vectorial euclideano o unitario de dimensión n y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortonormal de vectores. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $a_1, \ldots, a_m$ es una base de V.

(b) $\ell(a_1, \ldots, a_m) = V$.

(c) $m = n$.

(d) Para cualquier $v \in V$, si $v \perp \{a_1, \ldots, a_m\}$, entonces $v = \mathbf{0}$.

(e) Para todo $v \in V$, se cumple la igualdad de Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle a_j, v\rangle|^2.$$

79. Base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$. Definimos los vectores $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$e_j \coloneqq \left[\delta_{j,k}\right]_{k=1}^{n}.$$

Demuestre que $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^n$.

80. Base canónica del espacio $\mathbb{C}^n$. Definimos los vectores $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$ de la siguiente manera:

$$e_j \coloneqq \left[\delta_{j,k}\right]_{k=1}^{n}.$$

Demuestre que $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal del espacio $\mathbb{C}^n$.

81. Base canónica del espacio de matrices. En el espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ consideramos las "matrices básicas" $E_{p,q}$ ($1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$) definidas de la siguiente manera:

$$E_{p,q} = \left[\delta_{p,j}\delta_{q,k}\right]_{j,k=1}^{m,n}.$$

Demuestre que estas matrices forman una base ortonormal de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Representación de funcionales lineales en espacios euclideanos y unitarios

Se supone que V es un espacio unitario, es decir, un espacio vectorial complejo con producto interno. El caso real es similar.

82. Funcional lineal asociado a un vector en un espacio con producto interno. Sea $a \in V$. Definimos $\varphi_a \colon V \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$\varphi_a(v) \coloneqq \langle a, v \rangle.$$

Demuestre que $\varphi_a \in V^*$.

83. Teorema de la representación de funcionales lineales en un espacio unitario (teorema de Riesz–Fréchet para el caso de dimensión finita). Sea $\psi \in V^*$. Demuestre que existe un único vector $a \in V$ tal que

$$\forall v \in V \qquad \psi(v) = \langle a, v \rangle.$$

84. Ejemplo para el teorema de Riesz–Fréchet. En el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

consideremos al funcional lineal $\varphi(f) = f(3)$. Encuentre un polinomio $g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \qquad \varphi(f) = \langle g, f \rangle.$$

Sugerencia: primero construya una base en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que sea ortogonal respecto a este producto interno.

85. Isomorfismo conjugado entre un espacio unitario y su dual. Sea V un espacio unitario. Definimos $\Phi \colon V \to V^*$ de la siguiente manera:

$$\forall a \in V \qquad \forall v \in V \qquad (\Phi(a))(v) \coloneqq \langle a, v \rangle.$$

Demuestre que Φ es una función biyectiva y lineal conjugada:

$$\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad \Phi(\lambda a + \mu b) = \overline{\lambda}\, \Phi(a) + \overline{\mu}\, \Phi(b).$$

Complemento ortogonal

Se supone que V es un espacio vectorial real o complejo con un producto interno.

86. Sea $X \subseteq V$. Escriba la definición del *complemento ortogonal* de X.

87. Propiedad decreciente del complemento ortogonal. Sean X, Y subconjuntos de V tales que $X \subseteq Y$. Demuestre que

$$Y^\perp \subseteq X^\perp.$$

88. Sea $X \subseteq V$. Demuestre que su complemento ortogonal $X^\perp$ es un subespacio de V.

89. Escriba qué significa la frase: V es la *suma ortogonal* de sus subespacios S_1 y S_2.

90. Toda suma ortogonal es una suma directa. Sean S_1, S_2 subespacios de V tales que V es la suma ortogonal de S_1 y S_2. Demuestre que V es la suma directa de S_1 y S_2.

91. Teorema de la descomposición de un espacio euclideano o unitario en una suma ortogonal. Sea V un espacio euclideano o unitario. Demuestre que:

1. Si S es un subespacio de V, entonces V es la suma ortogonal de S y $S^\perp$.
2. Si V es la suma ortogonal de algunos subespacios S_1 y S_2, entonces $S_2 = S_1^\perp$.

92. Dimensión del complemento ortogonal. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de V. Demuestre que

$$\dim(S^\perp) = \dim(V) - \dim(S).$$

93. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de V. Demuestre que $(S^\perp)^\perp = S$.

94. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea X un subconjunto finito de V. Denotemos por W al subespacio generado por X. Demuestre que

$$X^\perp = W^\perp.$$

95. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un conjunto. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea X un subconjunto finito de V. Calcule $(X^\perp)^\perp$.

96. Complemento ortogonal de la suma de dos subespacios. Sean S_1, S_2 subespacios de un espacio vectorial V con producto interno. Demuestre que

$$(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp.$$

Observación: es suficiente pedir que S_1, S_2 sean subconjuntos de V tales que $\mathbf{0}_V \in S_1$ y $\mathbf{0}_V \in S_2$.

97. Complemento ortogonal de la intersección de dos subespacios. Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sean S_1, S_2 subespacios V. Demuestre que

$$(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp.$$

Sugerencia: usar los resultados de los problemas 96 y 93.

98. Ejemplo: complemento ortogonal al subespacio de las matrices que tienen traza nula. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(A^\top B)$$

consideremos el subespacio S que consiste en todas las matrices que tienen traza nula:

$$S \coloneqq \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \quad \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

Encuentre una base ortogonal de S y una base ortogonal de $S^\perp$. Hay que escribir todas las justificaciones necesarias.

99. Ejemplo: complemento ortogonal al subespacio de las matrices diagonales. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle A, B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}(A^\top B)$$

consideremos el subespacio S de las matrices diagonales. Encuentre una base ortogonal de S y una base ortogonal de $S^\perp$. Hay que escribir todas las justificaciones necesarias.

Transformaciones lineales isométricas entre espacios con productos internos

100. Escriba la definición de función isométrica entre dos espacios métricos.

101. Toda isometría es inyectiva. Sean X, Y espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$ una función isométrica. Demuestre que f es inyectiva.

102. Criterio para que una transformación lineal sea isométrica. Sean V, W espacios vectoriales (ambos reales o ambos complejos) con producto interno y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T preserva producto interno:

$$\forall a, b \in V \qquad \langle Ta, Tb \rangle_W = \langle a, b \rangle_V.$$

(b) T preserva norma:

$$\forall a \in V \qquad \|Ta\|_W = \|a\|_V.$$

(c) T preserva distancia (es decir, es isometría):

$$\forall a, b \in V \qquad d_W(Ta, Tb) = d_V(a, b).$$

(d) T convierte listas ortonormales en listas ortonormales: si $a_1, \ldots, a_m \in V$ son ortonormales, entonces $Ta_1, \ldots, Ta_m$ son ortonormales.

103. Corolario: si una transformación lineal es isométrica, entonces preserva ángulo. Sean V, W espacios vectoriales reales con producto interno y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal isométrica. Demuestre que para todos $a, b \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, el ángulo entre a y b es igual con el ángulo entre Ta y Tb.

104. Ejemplo. Consideramos la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad T(x) \coloneqq 5x.$$

Determine si T preserva norma; determine si T preserva ángulo.

105. Todo espacio euclideano de dimensión n es isometricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea V un espacio euclideano de dimensión n. Construya un isomorfismo isométrico $T\colon \mathbb{R}^n \to V$.

106. Todo espacio unitario de dimensión n es isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Sea V un espacio unitario de dimensión n. Construya un isomorfismo isométrico $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.