Determinantes

Problemas teóricos

Adradezco por varios problemas e ideas a los profesores de la ESFM Myriam Rosalía Maldonado Ramírez y Eliseo Sarmiento Rosales y al estudiante de servicio social Sadi Manuel Ramírez González.

Definición de la función determinante

Definición (el determinante de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces $\det(A)$ se define de la siguiente manera:

$$\det(A) \coloneqq \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\varphi(i)}. \tag{1}$$

1. De la fórmula general (1) deduzca la fórmula para el determinante de orden 2.

2. De la fórmula general (1) deduzca la fórmula para el determinante de orden 3.

3. Lema: correspondencia entre permutaciones y sus inversas. Demuestre que la función $g\colon S_n \to S_n$ definida mediante la fórmula $g(\varphi) = \varphi^{-1}$ es biyectiva.

4. Teorema (determinante de la matriz transpuesta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

5. Lema sobre las permutaciones distintas de la permutación identidad. Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq e$. Entonces existe un índice $i \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $\varphi(i) < i$.

6. Teorema (determinante de una matriz triangular superior). Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

7. Corolario (determinante de una matriz triangular inferior). Sea $A \in \mathrm{lt}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

8. El polinomio f está definido como el siguiente determinante. Escriba las permutaciones que corresponden a los miembros (sumandos) del determinante que contienen x^4 y calcule el coeficiente de x^4 en el polinomio f.

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x & 3 & -1 & 2x \\ 4 & 1 & 2x & 3 \\ -x & 2 & 3 & 5x \\ 7 & 7x & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Funciones polilineales alternantes

Definición (función polilineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función. Se dice que f es *polilineal* si f es lineal respecto a cada uno de sus k argumentos. De manera formal: para cualquier $p \in \{1, \ldots, k\}$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+1}, \ldots, a_k \in V$, $b, c \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_{p-1}, \lambda b + c, a_{p+1}, \ldots, a_k) = \lambda f(a_1, \ldots, a_{p-1}, b, a_{p+1}, \ldots, a_k) \\ + f(a_1, \ldots, a_{p-1}, c, a_{p+1}, \ldots, a_k). \end{aligned}$$

También se usan los términos *multilineal* y *k-lineal*.

Definición (función alternante). Sea $f\colon X^k \to \mathbb{F}$ una función de n argumentos. Se dice que f es *alternante* (*alternada*, *alterna*) si f se anula siempre que al menos dos de sus argumentos coinciden. De manera formal: si $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $x_i = x_j$, entonces $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$.

9. Para cada una de las siguientes funciones $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ determine si esta función es bilineal alternante o no:

1. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := ab - cd.$
2. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := ad - bc.$
3. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := a.$
4. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := 0.$
5. $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) := 1.$

10. Teorema (cualquier función polilineal alternante es antisimétrica). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función polilineal alternante. Demuestre que f es antisimétrica, es decir, f cambia el signo al intercambiar cualesquiera dos de sus argumentos.

11. Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V^3 \to \mathbb{R}$ una función 3-lineal alternante y sean $a, b, c \in V$. Exprese $f(a + 2b - c, 5a + c, 2b + c)$ a través de $f(a, b, c)$.

12. Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V^5 \to \mathbb{R}$ una función 5-lineal alternante y sean $v_1, v_2, v_3, v_5 \in V$. Demuestre que

$$f\bigl(v_1, v_2, v_3, 4v_1 - 5v_2 + 7v_3, v_5\bigr) = 0.$$

13. Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función polilineal alternante y $p \in \{1, \ldots, k\}$. Sean $v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_k \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$f\left(v_1, \ldots, v_{p-1}, \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j v_j, v_{p+1}, \ldots, v_k\right) = 0.$$

14. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una función polilineal alternante. Sea $(v_1, \ldots, v_k)$ una lista linealmente dependiente de vectores de V. Demuestre que

$$f(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

Indicación: use el problema anterior.

Determinante como una función polilineal alternante

15. Definición (determinante como función de los renglones de la matriz). Definamos la función $D\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ de la siguiente manera. Para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ pongamos $D(a_1, \ldots, a_n) = \det(A)$, donde A es la matriz formada de los renglones $a_1, \ldots, a_n$:

$$A = \big[(a_i)_j\big]_{i,j=1}^n,$$

esto es, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y $A_{i,j} \coloneqq (a_i)_j$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Por ejemplo, si $a_1, a_2 \in \mathbb{F}^2$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} (a_1)_1 & (a_1)_2 \\ (a_2)_1 & (a_2)_2 \end{bmatrix}, \qquad D(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} (a_1)_1 & (a_1)_2 \\ (a_2)_1 & (a_2)_2 \end{vmatrix}.$$

16. Teorema. Demuestre que D es una función polilineal.

17. Teorema. Demuestre que D es una función alternante. Indicación: antes de estudiar la demostración general se recomienda comprender el caso particular $n = 3$. Suponer que $a_1 = a_3$ y comprender cómo agrupar los 6 términos del determinante en pares de tal manera que en cada par los dos sumandos se cancelen.

18. Expresión de una función polilineal alternante a través de la función determinante. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una función n-lineal alternante. Demuestre que para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \det(A) f(b_1, \ldots, b_n)$$

donde A es la matriz formada por las columnas de coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$A = \big[(a_1)_{\mathcal{B}} \ \ldots \ (a_n)_{\mathcal{B}}\big].$$

19. Determinante es la única función polilineal alternante de los renglones de la matriz que toma valor uno en la matriz identidad. Sea $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$. Supongamos que f es una función n-lineal alternante de los renglones de la matriz y cumple con la condición $f(I_n) = 1$. Demuestre que $f = \det$.

20. Determinante del producto de matrices. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

21. Determinante de una matriz triangular superior por bloques. Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0}_{n\times m} & C \end{array}\right] = \det(A)\det(C).$$

Expansión del determinante por cofactores a lo largo de una fila o columna

22. Lema: encaje canónico de S_{n-1} en S_n. Consideremos la función $g\colon S_{n-1} \to S_n$ definida mediante la siguiente regla:

$$(g(\varphi))(i) = \begin{cases} \varphi(i), & i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ n, & i = n. \end{cases}$$

Demuestre que g está bien definida, es decir, $g(\varphi) \in S_n$ para toda $\varphi \in S_{n-1}$. Demuestre que g es inyectiva. Calcule la imagen (el conjunto de los valores) de la función g.

23. Lema: determinante de una matriz con el último renglón casi nulo. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz tal que $A_{n,j} = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Denotemos por B a la submatriz de la matriz A ubicada en los primeros $n-1$ renglones y las primeras $n-1$ columnas:

$$B = A_{\{1,\ldots,n-1\},\{1,\ldots,n-1\}}.$$

Demuestre que

$$\det(A) = A_{n,n} \det(B).$$

24. Lema: determinante de una matriz con un renglón casi nulo. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $A_{p,j} = 0$ para todos $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$. Denotemos por B a la submatriz de la matriz A ubicada en los renglones $\{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$ y las columnas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$:

$$B = A_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\},\{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}}.$$

Demuestre que

$$\det(A) = A_{p,q}(-1)^{p+q} \det(B).$$

25. Notación (cofactores). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por $\widehat{A}_{p,q}$ al determinante de la matriz que se obtiene de la matriz A al quitar el p-ésimo renglón y la q-ésima columna.

26. Teorema: expansión de un determinante por cofactores a lo largo de un renglón. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{p,j} \widehat{A}_{p,j}.$$

27. Enuncie el teorema sobre la expansión del determinante por cofactores a lo largo de una columna.

Cálculo de algunos determinantes del n-ésimo orden

En cada uno de los siguientes problemas hay que calcular el determinante D_4 y escribir una fórmula general para D_n. Sugerencia: aplicando operaciones elementales transforme la matriz a una matriz triangular. Haga las operaciones elementales de tal manera que el procedimiento se pueda generalizar naturalmente a cualquier orden n.

28. $D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}.$ **29.** $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$ **30.** $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

31. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix}.$ **32.** $D_4 = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}.$

33. $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ c & d & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$ **34.** $D_4 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$ **35.** $D_4 = \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}.$

36. $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}.$ **37.** $D_4 = \begin{vmatrix} a_1+x & x & x & x \\ x & a_2+x & x & x \\ x & x & a_3+x & x \\ x & x & x & a_4+x \end{vmatrix}.$

38. $D_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$ **39.** $D_4 = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix}.$

En los siguientes problemas las entradas de matrices están dadas por medio de ciertas fórmulas. Se recomienda escribir A_4 de manera explícita y calcular D_4 de tal manera que los cálculos se puedan generalizar al caso de n arbitrario.

40. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[\min\{i,j\}\right]_{i,j=1}^{n}$.

41. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[\max\{i,j\}\right]_{i,j=1}^{n}$.

42. $D_n = \det A_n$, donde $A_n = \left[|i-j|\right]_{i,j=1}^{n}$.

Matriz adjunta clásica

43. Definición (matriz adjunta clásica de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces la *matriz adjunta clásica* de A es la matriz $n \times n$ cuya (i,j)-ésima entrada es el (j,i)-ésimo cofactor de la matriz A:

$$\operatorname{adj}(A) \coloneqq \big[\widehat{A}_{j,i}\big]_{i,j=1}^{n}.$$

44. Teorema: propiedad principal de la matriz adjunta clásica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I_n, \qquad \operatorname{adj}(A)\, A = \det(A)\, I_n.$$

45. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz no invertible. Demuestre que cualquier columna de su matriz adjunta clásica $\operatorname{adj}(A)$ es solución de la ecuación $Ax = \mathbf{0}_n$.

Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su determinante

46. Si el determinante de una matriz es cero, entonces la matriz no es invertible. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $\det(A) = 0$. Demuestre que A no es invertible.

47. Expresión de la matriz inversa a través de la matriz adjunta clásica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $\det(A) \neq 0$. Pongamos

$$B \coloneqq \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Demuestre que $AB = I_n$ y $BA = I_n$.

Resumiendo los dos problemas anteriores obtenemos el siguiente criterio:

48. Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su determinante. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

49. Sea A una matriz de orden 2:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Calcule $\operatorname{adj}(A)$ y $\det(A)$. ¿Cuándo es invertible la matriz A? En el caso si A es invertible calcule A^{-1}.

50. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Demuestre que A es invertible, calcule $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}.

51. Sean a, b, c algunos números complejos diferentes a pares. Para la siguiente matriz A calcule $\det(A)$, $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

52. Descripción de las matrices que son divisores de cero. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ distinta de $\mathbf{0}_{n\times n}$ tal que $AB = \mathbf{0}_{n\times n}$.

(b) $\det(A) = 0$.

Nota: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *divisor derecho de cero* si cumple con (a) y es distinta de $\mathbf{0}_{n\times n}$.

Regla de Cramer

53. Enuncie y demuestre la regla de Cramer.

Rango y menores de una matriz

La demostración del siguiente teorema no se incluye en el examen (está en tareas adicionales).

54. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea $r = \mathrm{r}(A)$. Entonces para cualquier $k \in \{1, \ldots, r\}$ en la matriz A hay por lo menos un menor no nulo de orden k, y cualquier menor de A de orden $> r$ es cero.

Determinante de Vandermonde y su aplicación a la interpolación polinomial

55. Notación (matriz de Vandermonde). Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Denotemos por $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a la siguiente matriz:

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \coloneqq \left[\alpha_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Por ejemplo,

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}.$$

56. Fórmula recursiva para el determinante de Vandermonde, $\boldsymbol{n = 4}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) \det V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

57. Fórmula recursiva para el determinante de Vandermonde. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i)\right) V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

58. Fórmula para el determinante de Vandermonde. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} (\alpha_j - \alpha_i).$$

59. Corolario: determinante de Vandermonde generado por números diferentes por pares es no nulo. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ números diferentes por pares, esto es, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ si $i \neq j$, entonces $\alpha_i \neq \alpha_j$. Demuestre que

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0.$$

60. Existencia y unicidad del polinomio interpolante. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ números diferentes por pares y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Demuestre que existe un único polinomio $P \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j,$$

tal que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(\alpha_k) = \beta_k.$$